مبادئ المنطق الرمزى

دكتور

حسين على

أستاذ المنطق وفلسفة العلوم

كلية الآداب - جامعة عين شمس



دار الجوهـــرة

للنشر والتوزيع

مبادئ
المنطق الرمزي

اسم الكتاب

مبادئ المنطق الرمزي

دكتــور

حسين علي

أستاذ المنطق وفلسفة العلوم

جامعة عين شمس ــ كلية الآداب

قسم الفلسفة

سنة النشر

2014

رقم الإيداع بدار الكتب المصرية

٢١٦٧٣

الترقيم الدولي I.S.B.N

978-977-25030-4-3



دار الجوهرة للنشر والتوزيع

العنوان :

٩٣ ش مصطفى النحاس - الدور الـ ٩ -
مدينة نصر - القاهرة
جمهورية مصر العربية

الهاتف : ٠٠٢٠٢ ٢٦٧٠٩٢١٥

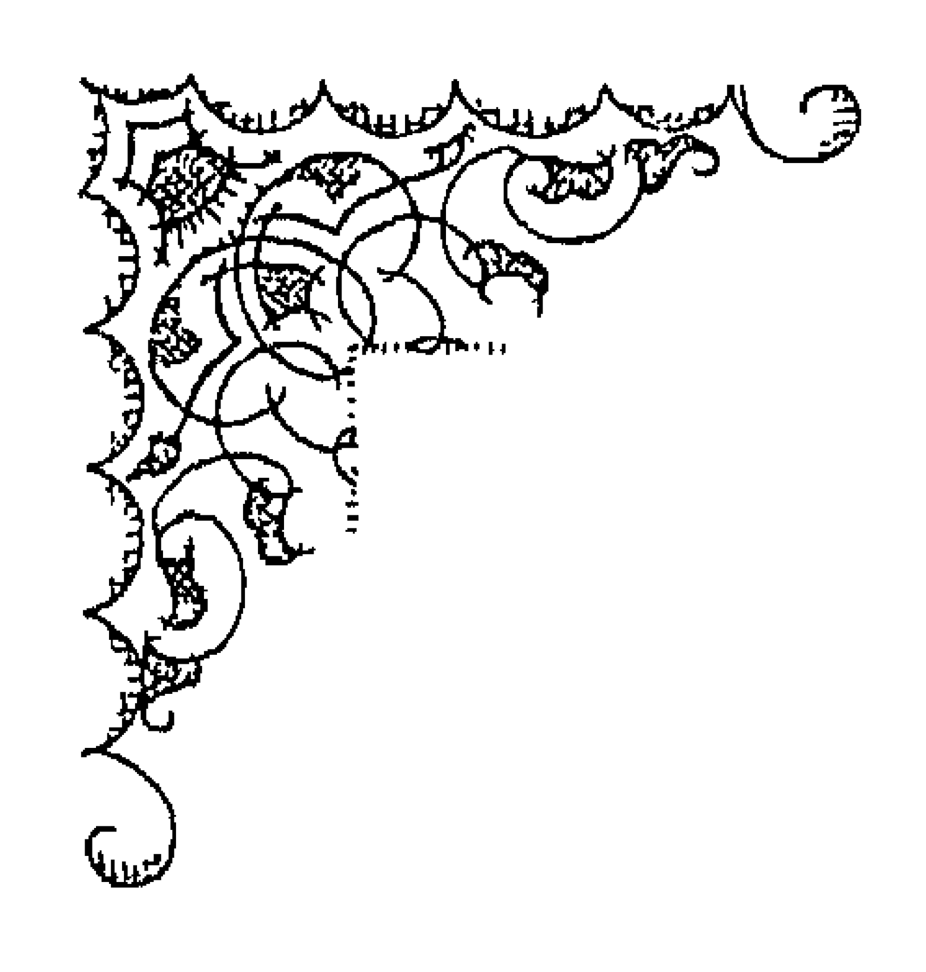
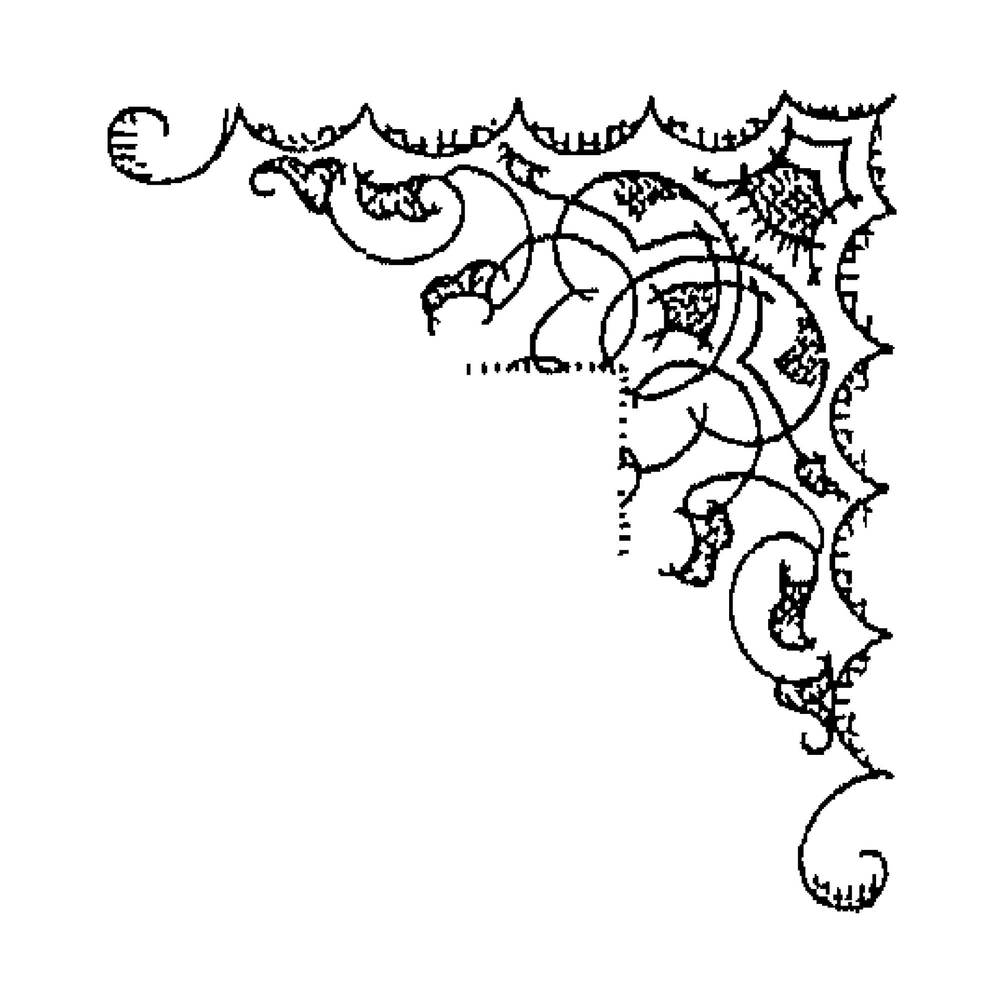
Dar.al-jawhrah.al-mutakdma@live.com

www.daraljawharh.com

مبادئ المنطق الرمزي

دكتور
حسين علي
أستاذ المنطق وفلسفة العلوم
جامعة عين شمس - كلية الآداب
قسم الفلسفة

دار الجوهرة للنشر والتوزيع
الطبعة الأولى
٢٠١٤

إهداء

إلى روح أستاذتي..

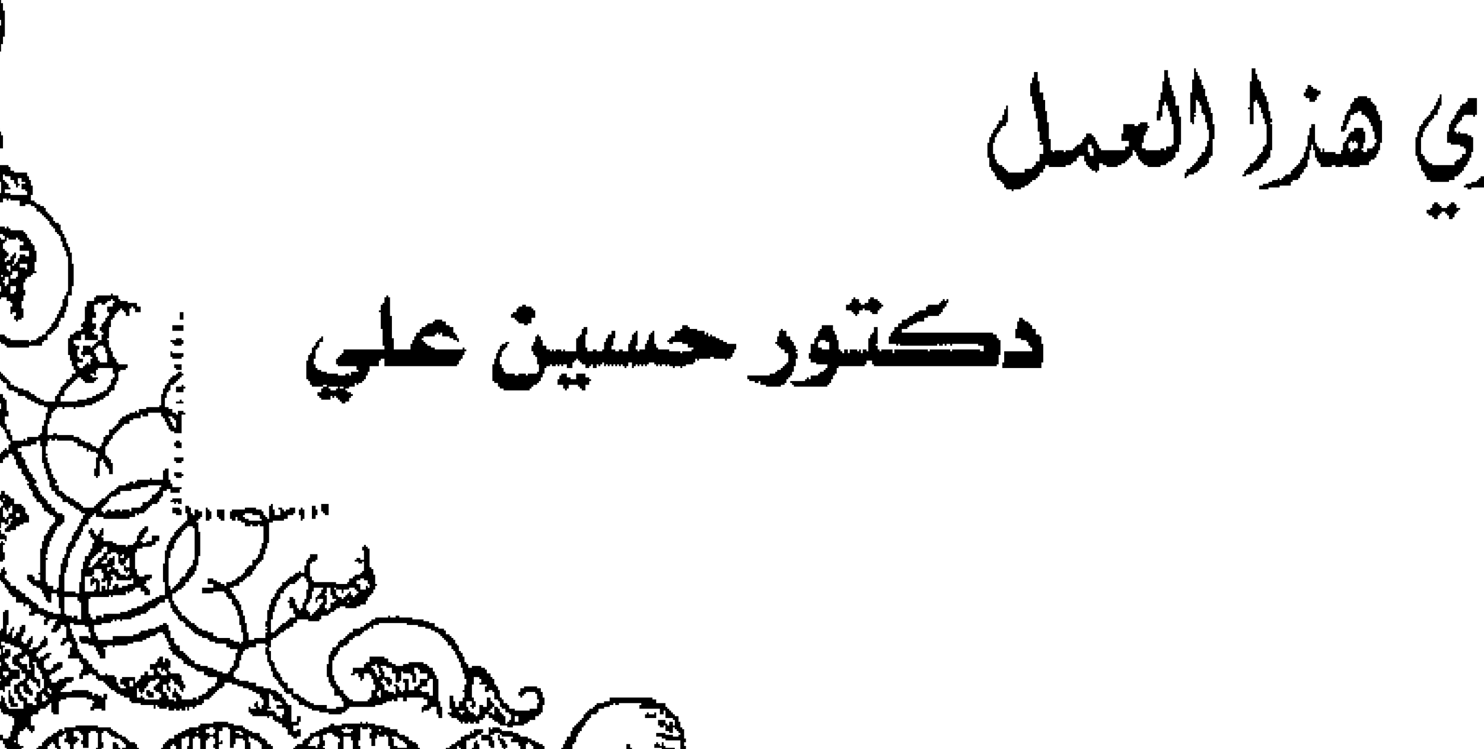
الدكتورة

نازلي إسماعيل حسين

التي لم تكن بالنسبة لي أستاذة مرشدة فحسب، بل كانت أماً ثانية،

أخذت بيدي في المواقف العلمية والإنسانية على السواء.

أهدي هذا العمل



دكتور حسين علي

مقدمة

إن المنطق الرمزي يحتاج، أكثر من أي مبحث آخر في الفلسفة، إلى معالجة فنية متخصصة لمشكلاته. فالمشكلات المنطقية لا تُحل بلغة مجازية، وإنما تقتضي دقة الصياغة الرياضية، بل إن مجرد التعبير عن المشكلة يكون في كثير من الأحيان مستحيلاً بدون مساعدة لغة تماثل في دقتها لغة الرياضيات. والمنطق هو الجزء الفني في الفلسفة، ولهذا السبب ذاته كان شيئاً لا غناء عنه للفيلسوف.

ولقد غدت أهمية المنطق الرمزي بالنسبة للتفكير الفلسفي تعادل الآن أهمية الرياضة لعلم الفيزياء، فهذا المنطق الذي كان في الأصل شفرة سرية لا تفهمها إلا جماعة صغيرة من الرياضيين، أخذ يجذب انتباه دارسي الفلسفة على نحو متزايد.

قد يبدو المنطق الرمزي لأول وهلة معقداً ومحيراً للطالب، شأنه في ذلك شأن أي أسلوب فني في التدوين، ولابد من بعض التدريب لكي يدرك الطالب أن هذا الأسلوب الجديد أداة تيسر الفهم المنطقي وتوضح الأفكار. ويقول ريشنباخ Reichenbach في هذا الصدد: «لقد تبين لي، من تجربتي في تدريس المنطق الرمزي، إن معظم الطلاب يخافون التدوين الرمزي ويكرهونه في البداية، ولكن بعد تدريب يدوم حوالي أسبوعين، تتغير الصورة، وتنتشر بينهم حماسة عجيبة للرمزية. ولا يتبقى بعد ذلك إلا عدد قليل من الطلاب الذين لا يفهمونه أبداً فهماً كاملاً، ويظلون كارهين للرمزية على الدوام».

ومهما يكن من شيء فإننا حاولنا جاهدين في هذا الكتاب أن نعرض للمنطق الرمزي بإيجاز ووضوح بقدر الطاقة. بحيث لا تتطلب قراءة هذا الكتاب أية معرفة مسبقة بعلم المنطق. ومن ثمّ قمنا بتقسيم الكتاب إلى ثلاثة فصول على النحو الآتي:

الفصل الأول، وعنوانه «المنطق - تعريفه، موضوعه، نشأته وتطوره»:

عرضنا خلاله لمعنى المنطق من الناحية اللغوية والاصطلاحية، كما أوضحنا في هذا الفصل كيف أن المنطق يتصف بالصورية، مع بيان ما نعنيه بالصورة المنطقية. كما تعرضنا لنشأة المنطق الرمزي، وأوضحنا كيف أن هذه النشأة ترجع إلى واقعتين، الأولى هي اكتشاف الهندسة اللاإقليدية حوالي منتصف القرن الماضي، والواقعة الثانية هي إقامة جورج بول G. Boole (١٨١٥ - ١٩٠٤) لما يُعْرَف باسم «جبر المنطق».

أما الفصل الثاني، فقد جعلنا عنوانه «الحساب التحليلي للقضايا» قمنا في هذا الفصل بعرض مفصّل للمنطق الرمزي بوصفه منطقاً ثنائي القيمة. وتناولنا من خلال هذا الفصل بالشرح الروابط القضائية، ودوال الصدق، وأنهينا هذا الفصل بعرض مفصّل لقوائم الصدق المطولة والمختصرة.

الفصل الثالث، عنوانه «المنطق الثلاثي القيم». لقد لاحظنا أننا حين نقرأ كتاباً في المنطق الرمزي نجده يكتفي بتناول المنطق من زاوية واحدة فقط، وهي كونه منطقاً ثنائي القيمة، وإغفال المحاولات التي تمت لإقامة منطق متعدد أو ثلاثي القيم. ومن ثمّ قمنا في هذا الفصل بعرض إحدى هذه المحاولات، وهي محاولة ريشنباخ إقامة منطق ثلاثي القيم، حيث يطالب ريشنباخ بالتوسع في مناهج المنطق الرمزي بحيث تتضمن وصفاً للأحكام الاحتمالية، إذ إن لغتنا المعتادة مبنية على منطق ثنائي القيم، أي على منطق قيمتي الصدق فيه هما «الصدق» و«الكذب»، ولكن من الممكن - في رأي ريشنباخ - تكوين منطق ثلاثي القيم، فيه قيمة متوسطة هي اللاتحديد. وفي هذا المنطق تكون القضايا إما صادقة وإما كاذبة، وإما لا محددة.

إن تخصيص فصل كامل عن المنطق الثلاثي القيم يمثل، في واقع الأمر، إضافة جديدة. ومع ذلك لا ندعي أي كمال لهذا الكتاب، بل نحن نعترف بأننا قد أغفلنا فيه عن قصد بعض الموضوعات التي نعد القارئ بأننا سوف نعود إلى تناولها في طبعة قادمة إن شاء الله.

الفصل الأول

المنطــــق

تعريفه، موضوعه، نشأته وتطوره

ما هو المنطق؟

كلمة «منطق» من ناحية الاشتقاق اللغوي كانت تدل في أول الأمر على الكلام، فالكلمة الإنجليزية Logic أو الكلمة الفرنسية Logique اشتقت من الكلمة اليونانية «لوجوس» Logos ومعناها «الكلمة»، ثم أخذت معنى اصطلاحياً وهو ما وراء الكلمة من عملية عقلية، فإذا كانت «لوجوس» معناها «الكلمة»، فهي تدل أيضاً على العقل أو الفكر والبرهان، ومن هنا كان من الميسور استخدام اسم صفة منها يدل على الفكر والبرهان والتفكير العقلي[١].

هذا عن أصل كلمة منطق في اللغات الأوربية، أما الكلمة العربية «منطق» فقد عُرِفَت حين تُرْجِمَ المنطق اليوناني إلى اللغة العربية. ولم تكن الكلمة تتضمن أول الأمر معنى التفكير أو الاستدلال، بل كانت تدل على معنى الكلام، لأن كلمة «النطق» في أصلها اللغوي لا تدل إلا على الكلام والتلفظ. فالمترجمون في القرن الثامن الهجري حين أرادوا ترجمة اللفظ اليوناني «لوجوس»، رجعوا إلى الأصل الاشتقاقي وهو النطق أو الكلام مع عدم مراعاتهم للمعنى الحقيقي المستعمل حينئذ لهذا اللفظ، حيث إنه لم يكن يدل على العقل أو الفكر كما هو الحال في اليونانية، ومن هنا أضطّر أهل الفلسفة حينئذ إلى تبرير هذا الاستعمال بأن فرقوا بين نوعين من النطق: النطق الظاهري والنطق الباطني، والأول

(١) د. عبد الرحمن بدوي، المنطق الصوري، وكالة المطبوعات، الكويت، ١٩٧٧، ص ٣.

هو التكلم، والثاني هو إدراك المعقولات. وبهذه التفرقة أعطوا الكلمة مدلولها الأصلي والاصطلاحي معاً[١].

ولقد رأى علماء المنطق القديم أن ميدان علم المنطق هو البحث في أشكال التفكير بوجه عام، أي البحث في قوانين الفكر السليم من ناحيتها الشكلية الصورية الصرفة، دون النظر إلى الموضوعات التي تنصب عليها عمليات التفكير. ولذلك أطلق ناشروا كتب أرسطو على المنطق اسم «الاورجانون» Organum أي الآلة أو الأداة التي يجب أن نبدأ بتعلمها قبل البدء في أي علم آخر. وانتقلت هذه الكلمة «الآلة» إلى الفلاسفة العرب، فعرّفوا المنطق بأنه آلة قانونية تعصم مراعاتها الذهن عن الخطأ في التفكير، ومن ثمَّ نظر هؤلاء الفلاسفة إلى المنطق على أنه مدخل للعلوم كلها[٢]. فالغزالي يقول عنه في كتابه «معيار العلم»: إن المنطق « كالميزان والمعيار للعلوم كلها».

والواقع أنه من اليسير الاهتداء إلى إجابات كثيرة عن السؤال القائل: «ما هو المنطق؟»، إذ يمكن - على حد قول تشارلز بيرس Charles Peirce (١٨٣٩ - ١٩١٤) - «تقديم حوالي مائة تعريف للمنطق». غير أن «بيرس» يستدرك قائلاً: «ومع ذلك فإنه عادةً ما يتم الإقرار بأن الموضوع الرئيسي للمنطق هو تصنيف البراهين لمعرفة الصحيح منها والباطل ...»[٣].

ومن ثمّ فإن المنطق يقوم بدراسة المناهج والمبادئ التي تمكننا من التمييز بين البراهين الصحيحة والبراهين الباطلة. وبعبارة أخرى، فإن المنطق هو العلم الذي يبحث في صحيح الفكر وفاسده. ويضع القوانين التي تعصم الذهن عن الوقوع في الخطأ. فموضوعه الفكر الإنساني، ولكنه يبحث في الفكر من ناحية خاصة هى ناحية صحته وفساده، ويكون ذلك بالبحث في القوانين العقلية العامة التي يتبعها العقل الإنساني في تفكيره، فما كان من التفكير موافقاً لهذه القوانين كان صحيحاً، وما كان مخالفاً لها كان فاسداً، فللمنطق ناحيتان:

---

(١) المرجع السابق، ص ٤.

(٢) د. يحي هويدي، منطق البرهان، مكتبة القاهرة الحديثة، القاهرة، ص ٣.

(3) Baldwin, James Mark, Logic, in "Dictionary of Philosophy Psychology" , The Macmillan Company, New York, 1925, p. 193.

الأولى: البحث في الفكر الإنساني بقصد الاهتداء إلى قوانينه ومعرفة الشروط التي يتوقف عليها الصحيح منه، وهو من هذه الناحية علم من العلوم له موضوع خاص وغرض معين.

والثانية: تطبيق هذه القوانين على أنواع الفكر المختلفة لمعرفة الصواب منها والخطأ، وهو من هذه الناحية فن من الفنون أو صناعة كما يسميه العرب. هذا إذا أردنا بالفن الناحية العملية للعلم الذي يستمد أصوله منه[١].

والقيمة العملية للمنطق هى تربية ملكة التفكير الصحيح أي تربية ملكة النقد وتقدير الأفكار، ووزن البراهين، والحكم عليها بالكمال أو النقص، بالصحة أو الخطأ، سواء في ذلك ما ظهر من أنواع التفكير في أقوال الناس أو أفعالهم أو كتبهم أو رواياتهم أو مقالاتهم العلمية أو الأدبية أو الفلسفية أو السياسية. نعم قد يقال إن الإنسان يفكر بطبعه، ويدرك الخطأ في تفكيره وتفكير غيره إلى حدٍّ ما بطبعه من غير أن يكون له إلمام بقوانين المنطق، وإذن ما الفائدة من تعلم المنطق؟ والجواب على هذا أنه قد لا يكون بنا حاجة إلى تعلم المنطق لو استقام تفكيرنا دائماً واستطعنا إدراك الخطأ في تفكيرنا، وفي تفكير غيرنا دائماً، ولكننا نخطئ حتى في أبسط أنواع التفكير، ولا نعرف نوع الخطأ الذي وقعنا فيه ولا سببه، ونعلل الحوادث أسقم التعليل من غير أن ندرك الضعف في تعليلنا، وندافع عن أفكارنا ومعتقداتنا وأفعالنا بأنواع من البراهين نُلْزِم بها الخصم إلزاماً، وهى في أساسها واهية ضعيفة أو فاسدة متداعية، وكثيراً ما نستنتج أوسع النتائج من أضيق المقدمات، أو نتخذ الأقوال المشهورة، والحكم السائرة قضايا بديهية نُلْـزِم خصومنا بضرورة التسليم بها، كما أننا كثيراً ما نُحَكِم العاطفة ومنطق العاطفة في موضوع العقل ومنطق العقل. كل هذه أسباب تبرر وجود علم يضبط قوانين الفكر، ويميز صوابه من خطئه، ويربي في العقل ملكة النقد والتقدير[٢].

وكثيراً ما يتم تعريف المنطق بوصفه علم القواعد العامة للتفكير السليم. غير أن هذا

---

(١) أبو العلا عفيفي، المنطق التوجيهي، مطبعة لجنة التأليف والترجمة والنشر، القاهرة، ١٩٣٨. ص ٥.

(٢) المرجع السابق، ص ص ٧ - ٨.

التعريف - وإن كان يشير إلى طبيعة المنطق - لا يُعد تعريفاً جامعاً مانعاً، إذ إن دراسة التفكير ليست مقتصرة على المنطق وحده، بل يشترك معه في ذلك علم النفس(١). فعلم النفس يتخذ موضوع دراسته كذلك من الفكر الإنساني ومن العمليات الذهنية المختلفة التي تدور داخل العقل أو الشعور. وهو إن لم يكن علم النفس بوجه عام، لأن علم النفس في تعريفه الصحيح هو العلم الذي يقوم بدراسة الإنسان من ناحية سلوكه، فهو - على الأقل - أحد فروعه الهامة وهو علم نفس الذكاء، إذ يقوم علم نفس الذكاء بدراسة الفكر الإنساني بما يشتمل عليه من عمليات ذهنية مختلفة، ثم يحاول بعد ذلك قياسها بمختلف الأقيسة والأجهزة المعروفة الآن في علم النفس التجريبي، وهو لا يفعل ذلك إلا من أجل تسجيل ما هو كائن. أما علم المنطق فيتناول دراسة الفكر الإنساني من حيث ما يجب أن يكون عليه من صحة واستقامة. ولذلك فإن القوانين التي ينتهى إليها عالِم النفس في دراسته للفكر والذكاء والعمليات الذهنية المتعددة تختلف عن القوانين التي ينتهي إليها عالِم المنطق في دراسته للفكر من حيث ما يجب أن يتوافر فيه من استقامة، الأولى وصفية تقريرية تسجيلية، يَقْنَع فيها عالِم النفس بتسجيل العلاقات التي تربط هذه العمليات الذهنية المعينة بالعمليات الأخرى. أما القوانين التي يقدمها لنا عالِم المنطق في دراسته للفكر الإنساني فهي قوانين معيارية، أو مجموعة من القواعد التقديرية التقويمية، التي يضعها عالِم المنطق ليقِّم بها معوج التفكير ويُصْدِر حكمه على هذا التفكير المعين أو ذاك بالصحة أو الفساد(٢).

إن العالِم المنطقي لا يشغل باله كيف نفكر أو لماذا نفكر، إن كل ما يشغله كيف نفكر على نحو صحيح. إن قوانين المنطق لا تشبه القوانين العلمية بقدر ما تشبه القوانين الخلقية. فهي لا تحاول وصف الوقائع، وإنما تسعى إلى وضع القواعد التي تميز ما هو صحيح عما هو خطأ. ويمكن بسهولة إدراك الاختلاف بين القوانين العلمية والقوانين المنطقية بواسطة فحص ظاهرة معينة تتعارض مع القانون. فإذا ما وُضع قانون علمي ما، ثم اكُتشفت واقعة تتعارض مع القانون، فإننا نقول أن القانون غير صحيح، إذ إن القانون العلمي يُصاغ لوصف

(1) Copi, Irving M., Symbolic Logic, The Macmillan Company, New York, 1967, p. 2.

(٢) د. يحي هويدي، منطق البرهان، ص ص ١٦ - ١٧.

الوقائع كما هي عليه. أما إذا حاول الإنسان أن يبرهن على أمر معين بطريقة تتعارض إلى حد ما مع مبادئ المنطق، فإننا لا نقول بخطأ مبادئ المنطق، وإنما نقول إن طريقة هذا الإنسان في البرهنة كانت طريقة خاطئة. وهذا يعني أن المنطق قد وُضِعَ ليس من أجل وصف الفكر الإنساني كعملية سيكولوجية، وإنما للتمييز بين الفكر الصحيح والفكر الفاسد[١].

الاستدلال هو الموضوع الأساسي للمنطق

الاستدلال جوهر المنطق، فهو الموضوع الرئيسي الذي تدور حوله الدراسة المنطقية، إذ إن الغرض الأساسي من المنطق هو الانتقال من «مقدمات» - وهي أقوال نسلم بها تسليماً، أو نعتقد بصحتها لسبب من الأسباب - ليصل بنا إلى «النتائج» التي تلزم عنها تلك المقدمات، والتي نستطيع أن نبين - استناداً إلى أسس منطقية خالصة - أنها تكون صادقة إذا ما صدقت المقدمات[٢].

والاستدلال في المنطق التقليدي يدور أساساً حول القياس، وهو نوع من الاستدلال غير المباشر الذي يبدأ بمقدمتين منتهياً إلى نتيجة نتبين صدقها، بناء على لزومها لزوماً ضرورياً عن المقدمتين اللتين افترضنا صدقهما، وذلك وفقاً لقواعد معينة تُعْرَف بقواعد القياس[٣]. ومن أمثلة الاستدلال القياسي، ما يلي:

كل إنسان فـان

كل مصري إنسان

كل مصري فـان

ويكشف المثال السابق عن الطابع الفارغ للاستدلال الاستنباطي، فلا يمكن أن تذكر النتيجة شيئاً أكثر مما ورد في المقدمات، وإنما هي تقتصر على الإفصاح عن محتوى معين

---

(1) Terrell, D. B., Logic - A Modern Introduction to Deductive Reasoning, Holt, Rinelart and Winston, Inc., New York, 1967, p. 6.

(٢) د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، ١٩٨٧، ص ١.

(٣) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ١٩٧٠ ص ١ .

موجود ضمناً في المقدمات، فهى تنزع الغلاف - إن جاز هذا التعبير - عن المضمون الذي كان مغلفاً في المقدمات(١).

إن قيمة الاستدلال الاستنباطي لترجع إلى كونه فارغاً، ذلك لأن كون الاستنباط لا يضيف أي شيء إلى المقدمات، هو ذاته السبب الذي يتيح على الدوام تطبيقه دون خوف من أن يؤدي إلى الإخفاق. وبعبارة أدق، فليست النتيجة بأقل يقيناً من المقدمات، فالوظيفة المنطقية للاستدلال الاستنباطي هى نقل الحقيقة من القضايا المعطاة إلى قضايا أخرى، ولكنه لا يستطيع أن يفعل أكثر من ذلك. فهو لا يستطيع أن يثبت الحقيقة التجريبية (أي الحقيقة المستمدة من الملاحظة) إلا إذا كنا نعرف من قبل حقيقة تجريبية أخرى. ومن الملاحظ أن مقدمتي المثال السابق، وهما: «كل إنسان فان»، «كل مصري إنسان»، هما معاً حقيقتان تجريبيتان، ومن ثمّ فإن النتيجة، وهى «كل مصري فان» هى بدورها حقيقة تجريبية، وليس فيها من اليقين أكثر مما في المقدمتين(٢).

ظل الفلاسفة دائماً يحاولون الاهتداء إلى مقدمات من نوع أفضل، وهناك بالفعل مقدمات من هذا النوع، هى التي تقدمها لنا مباديء المنطق فالقول: «إن كل شيء في هوية مع ذاته»، و«إن كل قضية إما صادقة أو كاذبة» هى مقدمات لا يتطرق إليها شك، ولكن عيبها أنها بدورها فارغة. فهى لا تذكر شيئاً عن العالَم الفيزيائي، وإنما هى قواعد نستخدمها في وصف العالَم الفيزيائي، دون أن تُسْهِم بشيء في مضمون الوصف. إن كل المعلومات التي تمدنا بها القضية القائلة «كل شيء في العالَم في هوية مع ذاته»، إنما هى تنحصر في تعريف يحدد شروط استخدام كلمة «الهوية»، وأن ما نعرفه من القضية ليس صفة للأشياء، وإنما هو قاعدة لغوية، فالمنطق يصوغ قواعد اللغة، ولهذا كان المنطق تحليلياً فارغاً(٣).

ولقد تعرض القياس الأرسطي - بسبب طابعه الفارغ - لموجات من النقد الشديد،

---

(١) ريشنباخ (هانز)، نشأة الفلسفة العلمية، ترجمة د. فؤاد زكريا، الطبعة الثانية، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ١٩٧٩، ص ٤٥.

(٢) المرجع السابق، الموضع نفسه.

(٣) المرجع السابق، ص ١٩٦.

فيقول الدكتور محمود قاسم[1]: إن القياس الذي وُصِفَ منذ عهد بعيد بأنه أكمل نموذج للاستدلال المنطقي، ليس إلا أوضح مثال على السفسطة بأكمل معانيها، بل على الدور المنطقي. ولقد نسب إليه «أرسطو «قيمة علمية ليس جديراً بها، ففي الواقع ليس القياس إلا تقريراً لحقائق سبق اكتسابها بطريقة أخرى، أي أنه لا يكشف عن جديد في الوقت الذي يزعم فيه أنه يؤدي إلى نتائج ضرورية مصحوبة بأسبابها. ففي المثال السابق، وهو:

كل إنسان فـــان

كل مصري إنسان

كل مصري فـــان

نرى أننا لا نستطيع تأكيد صحة المقدمة الكبرى إلا إذا سلمنا بصدق النتيجة. ومعنى ذلك أن هذه النتيجة شرط لصحة المقدمة. ومما يجعل الدور المنطقي أشد ظهوراً هو أننا نبدأ بتأكيد صفة الفناء بالنسبة إلى كل شعوب البشر، ثم ننتهي إلى تأكيدها بالنسبة إلى أحد هذه الشعوب، فالقياس يهدف إلى التبرير لا إلى البرهنة.

أما تشبيه القياس بالاستدلال الرياضي، فتشبيه مع الفارق. حقاً إن عالِم الهندسة يضع المبادئ والبديهيات والتعريفات ثم يستنبط منها النتائج الرياضية الجديدة. فعنصر الابتكار هو السبب في إنتاج الاستدلال الرياضي، في حين أن ترديد القياس لبعض الحقائق التي سبق اكتسابها هو السبب في عقمه وجموده. وقد قال «ديكارت» (١٥٩٦ -١٦٥٠) ما يشبه ذلك في حديثه عن القياس الذي يستخدمه المرء بالأحرى لكي يفسّر للآخرين الأشياء التي يعلمونها، بدلاً من أن يكشف لهم عن تلك التي يجهلونها، ولذا نرى «ديكارت» وغيره من المفكرين مثل «أوجست كونت» (١٧٩٨ - ١٨٥٧) ينصحون بالإقلاع عن استخدام القياس على النحو الذي كان يفعله «المدرسيون»، والاستعاضة عنه بالتحليل الرياضي، لأن الاستدلال لا يكون بمثل الدقة والصرامة اللتين يوجد عليهما في العلوم الرياضية، وهي تلك العلوم التي تُعَوِّد العقل على عدم الاستسلام للأسباب

(١) د. محمود قاسم، المنطق الحديث ومناهج البحث، دار المعارف، القاهرة، ١٩٦٧، ص ص ٤٥ - ٤٦.

الفاسدة، وهى المدرسة التي يجب أن يتعلم فيها الناس نظرية الاستدلال وتطبيقها العملي على حد سواء.

فالقياس ليس وسيلة مثلى أو نموذجية للبرهان: يرى أرسطو أن القياس - وبخاصةٍ من الشكل الأول - هو الوسيلة المثلى للبرهان، في حين أنه ليس برهاناً بالمعنى الصحيح، إذ يمكننا مثلا:

(أ) أن نبرهن على صدق نتيجة من مقدمتين كاذبتين، مثل:

كل حصان عاقل
كل إنسان حصان
كل إنسان عاقل

فالنتيجة هنا صحيحة من جهة الواقع، وإن كانت المقدمتان اللتان استُنْبِطَت منهما ظاهرتي الكذب.

(ب) أو أن نبرهن على صدق نتيجة من مقدمتين أحدهما كاذبة، مثل:

كل نبات له رائحة عطرة
الفل نبات
الفل له رائحة عطرة

النتيجة هنا أيضاً صادقة من جهة الواقع، رغم أن المقدمة الكبرى كاذبة ،لأنه ليس كل نبات له رائحة عطرة.

(جـ) أو أن نبرهن على كذب نتيجة من مقدمتين إحداهما صادقة والأخرى كاذبة، مثل:

كل حيوان يعيش في الماء
كل إنسان حيوان
كل إنسان يعيش في الماء

من الواضح هنا أن النتيجة كاذبة، وأيضًا المقدمة الكبرى، ورغم هذا فإن القياس صحيح حيث تتوافر فيه شروط القياس الصحيح.

ويرجع السبب في أننا نستطيع استنتاج مثل هذه النتائج المختلفة، إلى أن القياس عند أرسطو صوري في طابعه العام، ولذا فليس أساس صدق نتيجة القياس عنده هو مدى مطابقتها أو عدم مطابقتها للواقع الخارجي، بل مدى لزومها عن المقدمتين بالضرورة وفقاً لقواعد معينة، ولو كان الأمر مقصوراً على هذا الحد، لكان الاعتراض الأساسي على القياس هو كونه تحصيلا للحاصل، إلا أن أرسطو يعتبره في الوقت نفسه بمثابة الوسيلة المثلى للبرهنة على صدق قضايا تتكلم عن أشياء في الواقع الخارجي، ومن ثَّم اعتبره الوسيلة المثلى لتحصيل العلم، وذلك حين ذهب إلى أن القياس - وبخاصةٍ الشكل الأول - يكشف عن الأسباب، أي الحدود الوسطى، بحيث إذا عُرِفَت الأسباب عُرِفَت معها النتائج، وكأننا نقيس في هذه الحالة نتيجة القياس بمعيارين، معيار لزومها عن المقدمات، ومعيار مطابقتها للواقع، والمعياران مختلفان، والخلط بينهما يؤدي إلى أن تكون النتيجة الواحدة أحياناً في القياس، صحيحة من حيث لزومها الصوري عن المقدمات، وكاذبة من حيث مطابقتها للواقع[1].

المنطق يتصف بالصورية

نود أن نوضح بمزيد من الدقة تلك الطبيعة التحليلية للمنطق، والسبب الذي من أجله يُوْصَف المنطق بأنه فارغ. وبدايةً نقول إن المنطق يتصف بالصورية، فالصدق والكذب في علم المنطق صوريان، وليسا واقعيين أو تجريبيين، إذ إن ما يهم رجل المنطق هو العلاقات الكائنة بين أجزاء القضايا التي يستخدمها، وأجزاء الحجج المنطقية التي يقوم بعملها. وبعبارة أخرى، فإن الصور والروابط التي تقوم بينها - بصرف النظر عن أي «مادة» يمكن أن تتجسد فيها - هى الركيزة الأساسية في الدراسة المنطقية. ولعل هذا هو السبب الذي دفع بعض الباحثين إلى تعريف المنطق بأنه «علم الصورة الخالصة»، أو - كما سبق أن ذكرنا - «العلم الذي يبحث في صورة الفكر»، أو هو «تحليل لصورة

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ص ٧ - ٨.

الفكر»[١]. وبجانب الصورية، فإن المنطق يتصف أيضاً بالضرورة والفراغ، وهما صفتان متلازمتان، وهما معاً تؤلفان الطابع التحليلي للمنطق، أو صفة تحصيل الحاصل فيه، فكل العبارات المنطقية البحتة تحصيل حاصل، وهى لا تقول شيئاً، وبالتالي فإن ما تنبئنا به لا يزيد ولا ينقص عما ينبئنا به تحصيل الحاصل الآتي: «غداً ستمطر السماء أو لن تمطر»[٢].

ولنأخذ مثالاً من حياتنا اليومية نوضح من خلاله معنى «الصورة المنطقية» Logical form، وهذا المثال يتعلق بإشارات المرور التي يواجهها قائد السيارة:

«إذا كانت إشارة المرور حمراء فلابد أن أوقف سيارتي،

ولما كانت الإشارة حمراء.

لذا أوقفت سيارتي».

إن المقدمة الأولى تسمى «قضية لزومية «Implicative proposition وهى تمثل إحدى قواعد المرور البسيطة التي ينبغي أن يكون قائد السيارة على علم بها للحصول على رخصة قيادة، وكلنا نعرف هذه القاعدة. أما المقدمة الثانية فإننا سوف نأخذها كقضية مسلم بها. ويقرر الاستدلال أنه لما كانت المقدمات صادقة فلابد من أن تكون النتيجة صادقة أيضاً[٣].

ولتوضيح بنية Structure هذا الاستدلال سوف نرمز للقضية القائلة «إشارة المرور حمراء» بالرمز «ق»، ونرمز للقضية القائلة «أوقفت سيارتي» بالرمز «ل»، ومن ثمّ يمكننا صياغة الاستدلال على النحو الآتي:

إذا كانت «ق» صادقة، فان «ل» تكون صادقة

ولكن «ق» صادقة

إذن «ل» صادقة

---

(١) د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، ص ص ١ - ٢.

(٢) ريشنباخ، نشأة الفلسفة العلمية، ص ص ١٩٦ - ١٩٧.

(3) Edith Watsan Schipper and Edward Schuh, A First Course in Modern Logic, Routledge & Degan Paul, London, 1960 , pp. 67-68.

هذه هى الصورة المنطقية للاستدلال، وهى تعبر عن العلاقة القائمة بين القضايا - بغض النظر عن مكونات هذه القضايا - والتي بموجبها يتم استخلاص النتيجة من المقدمات[١]. ومن الواضح أن صحة هذا الاستدلال لا تتوقف على نوع القضايا المُكَوِّنة له، إذ يمكننا تغيير هذه القضايا، و يظل الاستدلال صحيحاً، ففي وسعنا مثلاً أن نقول:

إذا أمطرت السماء مكثت بالمنزل

ولكن السماء أمطرت

لذا مكثت بالمنزل

وبصفة عامة يمكننا القول إن صورة الشيء تتكون من العلاقات الكائنة بين أجزائه، بغض النظر عن مادة تلك الأجزاء، فنقول عن الشكل المعين إنه على صورة الهرم، إذا كانت العلاقات التي بين أجزائه مما يجعله على تلك الصورة الهرمية، مهما تكن مادته، إذ قد يُصْنَع الهرم من حجر أو خشب أو ورق أو غير ذلك من مواد. والساعة مادتها تروس وزنبرك وعقارب إلى آخر هذه الأجزاء، وأما صورتها فهى العلاقة التي تكون بين تلك الأجزاء، ولو فككنا أجزاء الساعة وكومناها على المنضدة بغير زيادة أو نقص، لما بقيت ساعة كما هى، لأنها فقدت صورتها حين تغيرت العلاقة التي كانت بين أجزائها[٢].

إن الأشياء التي نصادفها في حياتنا لها صورة ولها مادة، فهل للفكر أيضاً صورة ومادة؟ و إذا كان ذلك كذلك، فما هى صورة الفكر؟ وما هى مادته؟. إن مادة الفكر هى الكلمات وما إليها من رموز، أما صورة الفكر فهى العلاقات الكائنة بين هذه الألفاظ بغض النظر عن تلك الأجزاء نفسها، ولذا فقد تكون الصورة واحدة رغم اختلاف العبارات في اللفظ والمعنى.

ويقدم لنا برتراند رسل Bertrand Russell (١٨٧٢ - ١٩٧٠) توضيحاً رائعاً لمعنى «الصورة»، فيقول[٣]:

---

(1) Ibid., p. 68.

(٢) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، الطبعة الأولى، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ١٩٥١، ص ٤.

(3) Russell, Bertrand, Logic as the Essence of Philosophy, in "Our Knowledge of External World", London, 1914.
=

«أية قضية لها صورة بجانب الموضوع الخاص الذي تتناوله، وكذلك الأمر بالنسبة لأي استدلال، وما نقصده بالصورة هو الطريقة التي يتم من خلالها الربط بين عناصر القضية أو الاستدلال، فإذا قلت:

العقاد فـــــان

الشمس ساطعة

الكتاب مفيــد

فإننا نلاحظ وجود شيء ما مشترك بين هذه الحالات الثلاث، وهذا الشيء المشترك هو لفظ «يكون» Is [هو لا يظهر في اللغة العربية حتى لا يؤدي ظهوره إلى ركاكة اللغة، ففي اللغة العربية نقول: العقاد فان، والكتاب مفيد، ولا نقول العقاد يكون فان، والكتاب يكون مفيداً. أما في اللغة الإنجليزية، مثلا فيتم التعبير عن هذا اللفظ بواسطة فعل الكينونة verb to be فنقول مثلًا: «Plato is philosopher»]. إن الشيء المشترك بين العبارات الثلاث السابقة هو «صورة القضية» بغض النظر عن العناصر الفعلية التي تتألف منها كل قضية. وإذا تحدثنا عن العقاد وقلنا:

العقاد مفكر مصري

العقاد صديق سارة

العقاد اشتغل بالسياسة

فإننا نلاحظ وجود عنصر مشترك في القضايا الثلاث السابقة، وهو «العقاد». غير أن صورة كل قضية تختلف عن صورة القضية الأخرى، في حين أنني لو أخذت أية قضية من القضايا السابقة واستبدلت بمكوناتها مكونات أخرى، فإن الصورة تظل ثابتة رغم تغير مكوناتها، فإذا قلنا:

= نقلاً عن:

Langer, Susanne K., An Introduction to Symbolic Logic, Dover Publications, Inc., New York , 1967, pp. 32 - 33.

العقاد مفكر مصري

سقراط فيلسوف يوناني

تولستوي أديب روسي

فإن الصورة تظل واحدة في القضايا الثلاث جميعها رغم اختلاف كل عناصرها.

يتضح لنا مما سبق أن «الصورة» ليست عنصراً من عناصر القضية، وإنما هي الطريقة أو العلاقة التي تربط عناصر القضية بعضها ببعض. والواقع أننا قد نستطيع فهم معنى ألفاظ القضية، كل لفظ على حدة، دون أن نفهم القضية ذاتها، وهذا يحدث عندما تكون القضية طويلة ومعقدة. في مثل هذه الحالة لا نعرف شيئاً عن صورة القضية، وإنما تتعلق معرفتنا بمكونات القضية فحسب. وفي حالات أخرى قد تكون لدينا معرفة بصورة القضية دون أن نعرف شيئاً عن مكوناتها، فإذا قلت:

العنقاء تشرب الشوكران

فإن صورة هذه القضية - أي العلاقة بين أجزائها - واضحة، وهي علاقة فاعل بمفعول، أننا ندرك صورة هذه القضية رغم أنه لا علم لنا بأي عنصر من عناصرها، ومن ثمّ فإنه لفهم أية قضية لابد من أن ندرك عناصرها وصورتها الخاصة».

وهناك في كل لغة بعض ألفاظ وظيفتها الوحيدة بيان الصورة. وهذه الألفاظ بوجه عام أشيع في اللغة التي صرفها أقل، خذ مثلا: «سقراط هو إنساني Socrates is human»، فلفظ «is» ها هنا ليس من مكونات القضية ولكنه يشير فقط إلى صورة الموضوع والمحمول، وبالمثل في القضية «سقراط هو is أسبق من than أرسطو» فإن «هو is» و«من than» إنما يشيران فقط إلى الصورة[1]. وفي كل رمزية ابتُدِعَت حتى الآن للمنطق الرياضي توجد رموز لها معان صورية ثابتة، مثل هذه الرموز تعبر عما يسمى «بالثوابت المنطقية» وقد تُعَرّف الثوابت المنطقية بالضبط كما عَرَّفنا الصور. والواقع أنها في جوهرها نفس الشيء،

(١) رسل (برتراند)، مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة د. محمد مرسي أحمد ومراجعة د. أحمد فؤاد الأهواني، مؤسسة سجل العرب، القاهرة، ١٩٨٠، ص ٢١٤.

والثابت المنطقي هو ذلك الذي يعم عدداً من القضايا أية واحدة منها يمكن أن تنتج عن أية واحدة أخرى باستبدال حدود إحداهما بالأخرى، مثال ذلك «نابليون أعظم من ولنجتون» تنتج عن «سقراط أسبق من أرسطو» باستبدال نابليون بسقراط وولنجتون بأرسطو وأعظم بأسبق. ويمكن الحصول على بعض القضايا بهذه الطريقة من النموذج الأصلي «سقراط أسبق من أرسطو» وبعضها لا يمكن الحصول عليه. والتي يمكن الحصول عليها هى التي على الصورة «س ع ص» أي تعبر عن علاقات ثنائية. فنحن لا نستطيع أن نحصل من النموذج السابق باستبدال حد بحد على قضايا مثل «سقراط إنساني» أو «أعطى الأثينيون السم لسقراط»، لأن القضية الأولى من صورة الموضوع والمحمول، والثانية تعبر عن علاقة ثلاثية الحدود. وإذا وجب أن يكون عندنا أية ألفاظ في لغتنا المنطقية البحتة، فلابد أن تكون بحيث تعبر عن «ثوابت منطقية»، والثوابت المنطقية إما ستكون دائماً - وإما مشتقة من - ما يعم مجموعة من القضايا يُشْتَق بعضها من بعضها الآخر بالطريقة المذكورة باستبدال حد بحد، وهذا الذي يعم هو ما نسميه «صورة»[(١)].

والآن لعل هناك من يسأل عن السر الذي جعل المناطقة يولون عنايتهم إلى الصورة المنطقية وحدها. ولعل الإجابة الواضحة على مثل هذا التساؤل هى أن العناية بالصورة هى التي تتيح لنا التعميم. فكلما قل الاعتماد على المادة في علم من العلوم، كلما ازدادت درجة التعميم في هذا العلم. ولما كان المنطق يستبعد كل اعتبار للمادة، فإن قوانينه ومبادئه لابد أن تكون على قدر كبير من التعميم، بل يقع المنطق في أعلى سلم التعميم بين العلوم جميعاً، لأنه صوري خالص. ولكن لابد أن ندرك أن جميع العلوم صورية، بمعنى أنها تبحث في الجانب المشترك في الأمثلة الجزئية المختلفة، وكل ما بينها من اختلاف في هذا الشأن إنما هو اختلاف في درجة الصورية، وبالتالي في درجة التعميم. فقد يكون التعميم هو السر في الاهتمام بالصورة، فضلاً عن الدقة التي ترتبط باستخدام الرموز التي تعبر عن الصورة[(٢)].

---

(١) المرجع السابق، ص ص ٢١٥ - ٢١٦.

(٢) د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، ص ص ٥ - ٦.

اتساع دائرة البحث المنطقي

ركز أرسطو أبحاثه في ميدان أصبحنا نعلم اليوم أنه باب خاص جداً من أبواب المنطق، فقد صاغ قواعد الاستدلال الخاصة بالفئات، والمقصود بالفئة - كما سنعرف في الفصول القادمة - كل أنواع المجموعات أو الكليات، مثل فئة البشر، أو القطط[١]. فكون سقراط إنسان هو، بالنسبة إلى المنطق مثال لعضوية الفئة: إذ إن سقراط عضو في فئة الناس. ويسمى الاستدلال المتعلق بعضوية الفئة قياساً[٢]. غير أنه نتيجة لتطور المنطق حديثاً، ظهرت صور لبرهان غير قياسي nonsyllogistic يمكن التعبير عنه بمتغيرات القضايا variables propositional[٣]، مثل:

١- (ق ٧ ل) . ~ ق : ⊃ : ل

وتُقْرَأ: إن القول بصدق إحدى القضيتين ق، ل على الأقل، والقول بأن القضية ق كاذبة، كل هذا يلزم عنه أن تكون ل صادقة.

٢- (ق ⊃ ل) . ~ ل : ⊃ : ~ ق

وتُقْرَأ: إذا كانت القضية ق تستلزم القضية ل، وكانت القضية ل كاذبة، لزم عن ذلك أن تكون القضية ق كاذبة أيضاً.

٣- (ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م): ⊃ : ق ⊃ م

وتسمى بالمتسلسلة اللزومية implicative series

وتُقْرَأ: إذا كانت القضية ق تستلزم القضية ل، والقضية ل تستلزم القضية م، لزم عن ذلك أن القضية ق تستلزم القضية م.

ومما يدعونا إلى وصف الاستدلالات السابقة بأنها غير قياسية هو أن متغيرات القضايا

---

(١) ريشنباخ، نشأة الفلسفة العلمية، ص ص ١٩٠ - ١٩١.

(٢) المرجع السابق، ص ص ١٩١.

(3) Pap, Arthur, An Introduction to the Philosophy of Science, New York, 1962, p. 142.

فيها تشير إلى كل أنواع القضايا، في حين أن كل القضايا التي يشتمل عليها القياس بمعناه الضيق لا تخرج عن إحدى القضايا الأربع التالية[١]:

١- كل أ هو ب

٢- لا أ هو ب

٣- بعض أ هو ب

٤- بعض أ ليس هو ب.

مرة أخرى نقول إن الاستدلالات المشتملة على محمولات علائقية relational predicates تعتبر غير قياسية، ومن أمثلة ذلك ما يلي [٢]:

١- كل الجياد ذات أربع، إذن كل رؤوس الجياد هي رؤوس حيوانات ذات أربع.

٢- بعض الطلبة معجبون بأساتذتهم، إذن كل الأساتذة هم موضع إعجاب هذه المجموعة أو تلك من الطلبة.

٣- م والد ب ، ب والد جـ ، إذن م جد جـ.

٤- أ = ب ، ب = جـ ، إذن أ = جـ.

وبالإضافة إلى ما سبق فإننا نجد أن هناك صوراً لاستدلال ننتقل فيه من العام إلى الخاص، ومع هذا فهو يشبه التعميم الاستقرائي من حيث إنه ليس من الضروري أن تصدق النتيجة مادامت المقدمات صادقة، مثال ذلك ما يلي:

إن نسبة س ٪ من أعضاء الفئة أ تتصف بالخاصية ك. و «ص» هي عينة عشوائية سُحِبَتْ جزافاً من بين أعضاء الفئة أ، إذن فإن نسبة س ٪ تقريباً من أعضاء «ص «تتصف بالصفة ك.

(1) Ibid., p. 142.
(2) Ibid., p. 142.

وإجمالاً نقول إنه في المنطق المعاصر يُسْتَخدم مصطلح «الاستدلال الاستنباطي» على أنه استدلال ضروري(١). ففي الاستدلال نزعم أن النتيجة تتبع المقدمات بالضرورة المنطقية. وقلنا «نزعم إنها تتبع» is claimed to follows ولم نقل ببساطة «تتبع» follows حتى نستبعد استدلالات استنباطية باطلة كالتالية(٢):

١- (ق ⊂ ل) . ل : ⊂ : ق

تعبر هذه الصيغة عن استدلال غير صحيح.

وتُقْرَأ: إذا كانت القضية ق تستلزم القضية ل، وكانت ل قضية صادقة، لزم عن هذا أن تكون ق قضية صادقة أيضاً، وعادةً ما تسمى بـ «مغالطة التالي المثبت».

٢- «كل ك و» و«كل ص و»، إذن «كل ص ك» حيث و«حد أوسط»، و«ك» حد أكبر، و «ص» حد أصغر، وتسمى بـ «مغالطة عدم استغراق الحد الأوسط».

نخلص من كل ما سبق أن الصفة التي تميز الاستدلال الاستنباطي أنه فارغ، وأن صدق نتيجته يلزم لزوماً ضرورياً عن صدق المقدمات، في حين أن الاستدلال الاستقرائي ليس فارغاً أي أنه يؤدي إلى نتائج ليست متضمنة في المقدمات، فالنتيجة «أن كل الغربان سوداء» ليست متضمنة منطقياً في المقدمة القائلة «إن كل الغربان التي لوحظت حتى الآن سوداء»(٣). فقد تكون النتيجة كاذبة في حين تكون المقدمة صادقة.

المنطق نسق استنباطي

إن كل ما لدينا من معرفة يمكن صياغته على صورة قضايا، وهذه القضايا تتألف من حدود، وفي كل علم تُسْتَنبط بعض القضايا أو يُبرهن عليها استناداً إلى قضايا أخرى، فمثلاً نجد أن قوانين جاليليو Galileo (١٥٦٤ - ١٦٤٢) الخاصة بسقوط الأجسام، وقوانين كبلر

(1) Ibid., pp. 141 - 142.
(2) Ibid., p. 141.
(3) Ibid., p. 141.

Kepler (١٥٧١ - ١٦٣٠) الخاصة بحركة الكواكب يمكن أن تُسْتَخلص جميعها من القوانين الأعم للجاذبية التي قال بها نيوتن Newton، كما أن الكشف عن هذه العلاقات الاستنباطية المتبادلة كان طوراً هاماً في مسيرة تقدم علم الفيزياء، ومن ثمّ يمكن القول أن القضايا التي تشتمل على معرفة تتعلق بموضوع معين، تصير علماً لهذا الموضوع حين تنتظم هذه القضايا بحيث يأتي بعضها كنتائج مستنبطة من بعضها الآخر[1].

وفي كل علم يمكن تفسير أو تعريف الحدود terms المتضمنة في القضايا الخاصة به عن طريق حدود أخرى، فإذا أخذنا مرة أخرى مثالاً من علم الفيزياء، فسنجد أنه يتم تعريف الكثافة density بأنها كتلة وحدة الحجم، وتُعرّف العجلة acceleration بأنها معدل زمن تغير الوضع. إن هذا التعريف لبعض الحدود بواسطة حدود أخرى يكشف أيضاً عن علاقات متبادلة بين القضايا، فهو يوضح ارتباطها بموضوع مشترك، ويدمج تصورات العلم على النحو نفسه الذي تؤلف به الاستدلالات الاستنباطية بين قوانيها وأحكامها. أن القضايا المشتملة على معرفة معينة يمكن تحويلها إلى علم حين يتم تعريف بعض ألفاظها أو رموزها بواسطة ألفاظ أو رموز أخرى[2].

مما سبق تتضح أهمية «التعريف» و«الاستنباط» بالنسبة لأي علم، غير أنه لا ينبغي أن يُفْهَم من ذلك أنه لابد من إثبات كل قضايا العلم عن طريق استنباطها من القضايا الأخرى، أو أنه لابد من تعريف كل الحدود الخاصة بهذا العلم، إذ إن ذلك مستحيل، وكل ما هنالك أنه يمكننا تعريف بعض الحدود بواسطة حدود أخرى نفترض معناها مسبقاً، من ذلك يتبين أن العلم الصوري يتميز بصفة التسليم الافتراضي، فإذا صدقت كل مسلماته الأولى - البديهيات والمصادرات - كانت نظرياته صادقة، فصدق النظريات فيه متوقف على صدق المسلمات الأولى، وليس من شأنه أن يقيم البرهان على تلك المسلمات، بل هو يفترضها افتراضاً، ثم عليه بعد ذلك أن يلتزم حدودها في استنباط كل ما يلزم عنها من نظريات، وبالتالي فانه لو كانت كل حدود ورموز النسق مُعْرّفة، فإن ذلك يؤدي بالضرورة إما إلى

(1) Copi, Irving, M., Symbolic Logic, p. 178.

(2) Ibid., p. 178.

تتابع لا متناهي من التعريفات، أو إلى تعريفات دائرية circular definitions كتلك التي يشتمل عليها القاموس الذي يُعَرِّف كلمة « كبير» big بأنه «ضخم» larg، ويعرف كلمة «ضخم» بأنه « كبير». ومن الواضح أن التعريفات الدائرية عديمة القيمة في مجال العلم، كما أن التتابع اللامتناهي من التعريفات هو أيضاً عديم القيمة، ولذا لابد من الوقوف عند حد معين سواء في تعريفنا للحدود أو في إثباتنا للقضايا، أي ينبغي الاكتفاء بأقل عدد من القضايا يفي بالغرض بالنسبة إلى استنباط بقية القضايا الأخرى جميعها، والاقتصار على أقل عدد من الحدود يفي بالغرض بالنسبة إلى تعريف بقية الحدود الأخرى جميعها، إن المعرفة التي تنبني على هذا الأساس يُنْظَر إليها بوصفها «نسقاً استنباطياً»[1].

والواقع أن الهندسة الاقليدية هى نموذج للنسق الاستنباطي، ومن ثَمَّ نود أن نتوقف قليلاً عند هذه الهندسة لكي نوضح من خلالها ما نعنيه بالنسق الاستنباطي، فالمنهج الاستنباطي ليس من نتاج العصر الحديث، ففي كتاب «المبادئ» the elements للرياضي اليوناني اقليدس Euclid (حوالي سنة ٣٠٠ ق. م.) نجد دراسة لعلم الهندسة لا تترك كبير زيادة لمستزيد من حيث المبادئ المنهجية، ولقد لبث الرياضيون مدى ألفين ومائتي عام، ينظرون إلى كتاب اقليدس نظرتهم إلى المثل الأعلى والنموذج الذي يحتذى في مراعاة الدقة العلمية[2]. بدأ اقليدس هندسته بتعريف بعض الألفاظ:

التعريف الأول: «النقطة ما ليس لها أجزاء».

التعريف الثاني: «الخط له طول بغير عرض».

إن اقليدس لم يحاول بطبيعة الحال، تعريف كل ألفاظه، فالتعريف الأول والثاني اقتصرا على تحديد معنى «النقطة» و«الخط» على التوالي، أما الألفاظ المستخدمة في هذه التعريفات، مثل: «أجزاء» و«طول» و«عرض» فلم يتم تعريفها، ولذا تسمى «لا معرفات».

ومن أجل تشييد النسق الاستنباطي للهندسة قسّم اقليدس القضايا التي نسلم بصحتها

(1) Ibid., pp. 178-179.

(٢) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ص ٣٠٤.

إلى مجموعتين، أطلق على إحداهما اسم «البديهيات» axioms وأطلق على المجموعة الثانية اسم «المصادرات» postulates. ومع ذلك لم يقدم اقليدس سبباً للتمييز بين البديهيات والمصادرات، إذ لا يوجد أساس واضح بدرجة كافية للتمييز بينهما، ولربما يكون دافعه إلى هذا التمييز هو مجرد إحساسه بأن إحداهما أعم وأوضح من الأخرى، غير أن علماء الرياضة المعاصرين لا يقيمون مثل هذه التفرقة بين البديهيات والمصادرات، وإنما ينظرون نظرة واحدة لا تمييز فيها إلى كل القضايا المسلم بها[1]، أي القضايا الأولية للنسق الاستنباطي. ويشيرون إليها بوصفها بديهيات أو مصادرات. ويُطْلَق على مجموعة التعريفات واللامعرفات والمسلمات في العلم الصوري عبارة «نسق البديهيات»، وعلى أساس نسق البديهيات يتم الاستدلال على النظريات أو المبرهنات. ويُطْلَق على مجمل نسق البديهيات والنظريات أو المبرهنات اسم «النسق الاستنباطي».

ونحن حينما نتحدث عن المنطق الرمزي بوصفه نسقاً استنباطياً إنما نعني شيئاً قريباً من هذا، إذ إن النسق المنطقي يتألف من مقدمات معينة ونتائج تلزم عن تلك المقدمات وفق قواعد معينة. وتضم المقدمات مجموعة من الأفكار الأولية أو اللامعرفات، وعدداً من التعريفات، وبعض المسلمات أو المصادرات، وتذكّرنا هذه الملامح العامة لنسقنا الاستنباطي بالهندسة الاقليدية، إلا أننا في النسق الاستنباطي نكون أكثر حذراً ودقة بالنسبة لنقطة بدايتنا (المقدمات) أكثر مما نكون كذلك في الهندسة الاقليدية، ذلك لأن الهندسة الاقليدية تفترض مقدمات دون أن تضع في الاعتبار الاجراءات المألوفة للاستدلال المنطقي. أما في النسق المنطقي فلابد من أن نضع في اعتبارنا مثل هذه الإجراءات، ومن هنا تأتي مراعاة الحذر والدقة عند اختيار مقدماتنا[2].

وفيما يلي الخطوات التي ينبغي اتباعها لإقامة نسق منطقي رمزي[3]:

١- إعداد قائمة بالرموز الأولية المستخدمة في النسق.

(1) Copi, Irving M., Symbolic Logic, p. 181.

(٢) د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، ص ص ١٥٤ - ١٥٥.

(٣) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ١٧.

٢- تحديد نوع التوالي - أو العلاقة - بين هذه الرموز الأولية، أو طريقة تتابعها وترابطها على نحو يؤدي إلى تكوين صيغ النسق بطريقة صحيحة.

٣- تحديد الصيغ التي يمكن اعتبارها بديهيات، من بين تلك الصيغ التي تم تكوينها بطريقة صحيحة.

٤- تحديد قواعد الاستدلال التي يمكن بواسطتها أن نستدل على صيغ تم تكوينها بطريقة صحيحة، من مجموعة الصيغ التي اعتبرناها مقدمات.

نشأة المنطق الرمزي

إن علم المنطق اكتشاف يوناني، وليس معنى هذا أنه لم يكن هناك تفكير منطقي قبل اليونانيين، إذ إن التفكير المنطقي قديم قدم التفكير الإنساني ذاته. وكل نشاط فكري ناجح يخضع لقواعد المنطق، غير أن تطبيق هذه القواعد دون وعي في عمليات التفكير العملي شيء، وصياغتها بصورة واضحة من أجل جمعها على شكل نظرية شيء آخر. ولقد كان هذا البحث المخطط في القواعد المنطقية هو الذي بدأ على يد أرسطو، غير أن أرسطو ركّز أبحاثه في ميدان أصبحنا نعلم اليوم أنه باب خاص جداً من أبواب المنطق. فقد صاغ قواعد الاستدلال الخاص بالفئات، أي الاستدلال المتعلق بعضوية الفئات. والمقصود بالفئة(*) class كل أنواع المجموعات أو الكليات، مثل فئة البشر، أو القطط. فكون سقراط إنساناً هو، بالنسبة إلى المنطق، مثال لعضوية الفئة: إذ إن سقراط عضو في فئة الناس، ويُسَمى الاستدلال المتعلق بعضوية الفئة قياساً، مثال ذلك أن نستدل من المقدمتين « كل إنسان فان» و«سقراط إنسان» على النتيجة «سقراط فان»[1].

(*) من الملاحظ عدم وجود اتفاق بين الباحثين العرب حول ترجمة كلمة «class»، فنجد الدكتور زكي نجيب محمود يترجمها إلى «فئة» ويأخذ بنفس الترجمة كل من الدكتور عبد الحميد صبره والدكتور فؤاد زكريا والدكتور عزمي إسلام والدكتور محمد مهران. بينما نجد الدكتور عبد الرحمن بدوي يترجمها إلى «صنف» ويأخذ بنفس الترجمة كل من الدكتور يحيى هويدي والدكتور محمود فهمي زيدان، في حين يترجمها إلى «فصل» كل من الدكتور أحمد فؤاد الأهواني والدكتورة نازلي إسماعيل حسين والدكتور محمد مرسي أحمد.

(١) ريشنباخ، نشأة الفلسفة العلمية، ص ص ١٩٠ - ١٩١.

هذا النوع من الاستدلال يبدو لأول وهلة ضئيل القيمة، غير أن مثل هذا الحكم ليس فيه إنصاف لأرسطو، فما كشفه أرسطو هو أن للاستدلال صورة ينبغي التمييز بينها وبين مضمونه. فالعلاقة بين المقدمتين والنتيجة، كما تتمثل في الاستدلال المتعلق بسقراط، مستقلة عن الفئات الخاصة المشار إليها، وهي تظل سارية على غيرها من الفئات والأفراد المناسبين أيضاً. وبفضل دراسة أرسطو للصور المنطقية، اتخذ الخطوة الحاسمة التي أدت إلى قيام علم المنطق. وقد صاغ بوضوح بعض المبادئ للمنطق، مثل مبدأ الهوية ومبدأ التناقض[١].

غير أن أرسطو لم يقم إلا بالخطوة الأولى، فقد كان هو وأتباعه يحصرون انتباههم فيما أطلقوا عليه اسم القضية الحملية التي قوامها الأساسي موضوع ومحمول، أي موصوف وصفته، وكانوا يردّون كل قضية مهما كانت صورتها، إلى هذا النوع الواحد الذي شغل أذهانهم، فإن قلت: «سقراط إنسان» قالوا: «سقراط موضوع وإنسان محمول»، وإن قلت: «قيس أحب ليلى» قالوا: «قيس موضوع، وإنسان أحب ليلي محمول» وهكذا[٢]. معنى هذا أن منطق أرسطو قد اقتصر على علاقة واحدة فحسب، وهي العلاقة الحملية. غير أن هناك علاقات أخرى لم يتطرق إليها المنطق الأرسطي.

وإن المرء ليميل إلى الاعتقاد بأنه لم يكن من العسير على مكتشف منطق الفئات أن يمتد بعمله إلى منطق العلاقات، مادامت اللغة التي كان يتكلمها لم تكن تقل تطوراً عن لغتنا، وكانت لها كل الصور النحوية اللازمة لمعالجة العلاقات. وفضلاً عن ذلك فقد عرف أرسطو بوجود العلاقات، ففي كتابه عن المقولات يشرح بوضوح تام أن علاقة مثل «أكبر من» تقتضي شيئين تسرى بينهما. ولكنه لا يمتد بنظريته في الاستدلال بحيث تشمل العلاقات. وقد يكون السبب هو أن اهتمام واضع منطق الفئات بالمسائل الأقرب إلى الطابع الميتافيزيقي كان أعظم من أن يتيح له الوقت اللازم لإكمال عمله المنطقي. ولكن إذا صح ذلك فقد كان في استطاعة واحد من تلاميذه أن يضع منطقاً للعلاقات. غير أن العجيب أن شيئاً من ذلك لم يحدث، ويبدو أن أرسطو لم يدرك أبداً أن لمنطقه حدوداً لم يستطع أن

---

(١) المرجع السابق، ص ١٩١.

(٢) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ص ٧٧.

يتعداها. ولم يضف تلاميذه إلا تفصيلات قليلة، ولكنهم لم يتجاوزوا عمل أستاذهم في أي موضوع أساسي. ولم يطرأ تغير إلى الأحسن في القرون التالية. وهكذا تتمثل في تاريخ المنطق صورة عجيبة لعلم ظل طوال أكثر من ألفي عام في نفس المرحلة الأولية التي تركه فيها مؤسسه[١].

ولقد تعرض المنطق القديم لكثير من النقد، سواء من الفلاسفة أو العلماء أو المناطقة القدامى والمحدثين، الأمر الذي أدى إلى اتخاذ أحد موقفين أساسيين منه، هما[٢]:

١- إما اعتبار أن النقائص والعيوب في المنطق القديم - على كثرتها - هى مما يمكن اصلاحها وتلافيها، ومن ثمَّ فمن الممكن اصلاح المنطق القديم وتطويره على نحو يتفق ومتطلبات التفكير الحديث (علمياً كان أو فلسفياً).

٢- و إما اعتبار هذه النقائص والعيوب - لكثرتها - هى مما لا يمكن اصلاحها، بل أصبح الأمر عند كثير من المحدثين والمعاصرين يقتضي إيجاد طريقة منطقية أخرى، أو منطق آخر جديد، من شأنه أن يتفق والنظرة العلمية والفلسفية الجديدة. بل ومن شأنه كذلك أن يساعد العلماء (وخاصةً علماء الرياضة) على حل كثير من المشكلات المتعلقة بالعلم الرياضي نفسه.

الموقف الأول، يرى أصحابه (مثل لوكاشيفتش) إمكان إصلاح المنطق القديم، و إمكان التعبير عنه من خلال النظرية المنطقية الحديثة. أما الموقف الثاني، فيرى دعاته - منذ بيكون في القرن السابع عشر وحتى برتراند رسل في القرن العشرين - ضرورة وضع منطق آخر جديد. وسوف نقتصر في هذا البحث على عرض آراء أصحاب الإتجاه الثاني.

ولقد كان أول رياضي عظيم اتجه اهتمامه صوب المنطق هو ليبنتس Leibnitz (١٦٤٦ - ١٧١٦). فقد كان يحلم أن يصبح كل تفكير فلسفي أشبه بالحساب بحيث يمكن حسم

---

(١) ريشنباخ، نشأة الفلسفة العلمية، ص ص ١٩١ - ١٩٢.

(٢) د. عزمي إسلام، دراسات في المنطق - مع نصوص مختارة، مطبوعات جامعة الكويت، الكويت، ١٩٨٥، ص ٥.

أي خلاف ينشأ بين فيلسوفين، وهذا يقتضي وجود لغة رمزية شبيهة بلغة الرياضيات، فنادى بما أطلق عليه اسم «اللغة العالمية» وهى لغة رمزية تصويرية يشير كل حرف فيها مباشرة لمفهوم بسيط، وتكون مثل هذه الحروف - التي يطلق عليها اسم الحروف الحقيقية - مفهومة عند جميع الناس مهما تكن اللغة التي يتكلمون بها. وتتصف هذه اللغة العالمية بأنها بمثابة حساب عقلي مثل الجبر، وتشكل حروفها «أبجدية الفكر البشري» التي تناظر جميع الأفكار البسيطة الممكنة، وينبغي أن تكون هذه الأفكار البسيطة هى المفاهيم الأولية التي تتألف منها المفاهيم المركبة بواسطة قواعد التركيب، ويطلق ليبنتس على هذه العملية اسم «فن التركيب» وهذا الفن هو الحساب العقلي[١].

وعلى الرغم من أن ليبنتس يُوْصَف أحياناً بأنه أول المناطقة الرياضيين، فإنه لم يكن يمثل نقطة التحول في تاريخ المنطق، إذ كان برنامجه يختلف عن تصورات المنطق الرياضي (الرمزي) كما نفهمه اليوم في جانبين، الأول: أن ليبنتس لم يستطع أن يدرك أن العلاقات التي ينطوي عليها منطقه لابد أن تكون موضع تحليل. ولعل ذلك يرجع إلى أنه لم يستطع أن يتحرر من المنطق الأرسطي، على الرغم من إدراكه لبعض نقائص هذا المنطق وعيوبه. لقد كان منطقه يختلف بلا شك في بعض النقاط عن المنطق الأرسطي، ونحن نعرف اليوم أن المنطق الأرسطي كان مخطئاً في هذه النقاط، إلا أن احترام ليبنتس لأرسطو منعه من أن يدرك إمكان حدوث هذا الخطأ. والثاني: أنه افترض أن المفاهيم الأولية لابد أن تكون آتية نتيجة تحليل صحيح، مادامت هذه المفاهيم متاحة نتيجة لأبجدية الفكر البشري. إلا أن هذا غير صحيح، لأن المفاهيم الأولية الخاصة بأي نسق استنباطي ليست متاحة given، بل هى إلى حد ما مختارة بشكل تعسفي[٢]. ومن ثمَّ يمكننا القول أن ليبنتس كان مبشراً باتجاه جديد أكثر منه واضعاً أساس إيجابي للمنطق الرمزي[٣].

لقد بدأ ظهور المنطق الرمزي حوالي منتصف القرن التاسع عشر، وواصل تقدمه في القرن

(١) د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، ص ص ٢٩ - ٣٠.
(٢) المرجع السابق، ص ص ٣٠ - ٣١.
(٣) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، الجزء الثاني، ص ١٧٨.

العشرين لا بفضل مجهود الفلاسفة، وإنما بفضل علماء الرياضة، ومرجع السبب في ذلك هو أنه خلال القرن الماضي ازداد إدراك علماء الرياضة بضرورة إعادة فحص الجانب الأعظم من أسس الرياضيات، وإعادة بنائها على أسس جديدة، فأكتشف علماء الرياضة أن المنطق التقليدي (منطق أرسطو وأتباعه) لا يصلح لتحقيق هذا الغرض. ومن ثمّ شرع الرياضيون في تطوير نسق من المنطق كان أكثر تخصصاً وأكثر دقة. ونتج عن ذلك المنطق الرمزي (خاصةً الأنساق التي أقامها فريجه Frege، ووايتهد Whithead - رسل Russell، وهلبرت Hilbert)(١).

ويسمى المنطق الرمزي Symbolic Logic بأسماء عدة منها: لوجستيقا Logistic، أو «جبر المنطق» Algebra of Logic، أو المنطق الرياضي، أو المنطق الصوري، وكلها عبارات مترادفة. يُسَمى المنطق الرمزي لأن لغته الرموز، وليس معنى هذا أنه يسمى رمزياً لمجرد استخدامه رموزاً، فإن هناك علوماً تستخدم الرموز ولا نسميها المنطق الرمزي، كعلم الجبر مثلاً، واستخدام الرموز شرط ضروري لإقامة هذا المنطق، لكنه شرط غير كاف ليكون رمزياً، بل يجب - إلى جانب استخدامه الرموز - أن يدرس العلاقات المختلفة بين الحدود في قضية ما، والعلاقات المختلفة التي تربط بين عدة قضايا، ووضع القواعد التي تجعل من القضايا التي يرتبط بعضها ببعض قضايا صادقة دائماً. وترجع تسمية المنطق الرمزي باللوجستيقا إلى اتلسن Itelson ولالاند Lalande وكوتيرا Couturat في المؤتمر الدولي للفلسفة بباريس عام ١٩٠٤، لكنا نلاحظ أن الكلمة كانت مستخدمة من قديم، فقد استخدمها الفيثاغوريون للدلالة على جداول يجد فيها الحاسبون نتائج العمليات الحسابية دون جهد وتُذكرنا بجداول اللوغاريتمات اليوم، وقد استخدم ليبنتس الكلمة كمرادفة لعبارتي «المنطق الرياضي» و«حساب البرهنة» Calculus Ratiocinator، ونلاحظ أيضاً أن «لوجستيقا» لم تُسْتَخدم فقط للدلالة على المنطق الرمزي، وإنما استخدمت أيضاً للدلالة على اتجاه رد التصورات الرياضية الأساسية إلى تصورات منطقية خالصة. وفي القرن التاسع عشر سُمِيَ المنطق الرمزي أيضاً «جبر المنطق» وترجع هذه التسمية إلى جورج بول الذي

(1) Carnap, Rudolf, Introduction to Symbolic Logic and its Application, Dover Publication, Inc., New York, 1958 , p. 3.

جعلها اسماً لنظريته في جبر الفئات، ثم استخدمها بيرس وشرويدر للدلالة على نظريات المنطق الرمزي كلها، حيث صيغت جميعها على نموذج جبر الفئات. ويسمى المنطق الرمزي كذلك «المنطق الرياضي». وبيانو أول من استخدم هذا التعبير، وكان يعني به نوعين من البحث: كان يعني أولاً صياغة المنطق الجديد صياغة تستخدم الرموز والأفكار الرياضية، ويعني بها ثانياً البحث في رد الرياضيات إلى المنطق، وكان يسمى هذا البحث الثاني أيضاً «فلسفة الرياضة». وسمى المنطق الرمزي أخيراً «المنطق الصوري» حيث يراد له أن يكون أكثر صورية مما أتى عليه أرسطو، ونجد هذه التسمية بنوع خاص عند رسل(١).

ذكرنا أن المنطق الرمزي قد ظهر في حوالي منتصف القرن التاسع عشر، عندما حاول علماء الرياضة فحص أسس الرياضيات. وتوضيحاً لذلك نقول أن هناك واقعتين مستقلة إحداهما عن الأخرى أدتا إلى نشأة المنطق الرمزي، الواقعة الأولى هى اكتشاف الهندسة اللااقليدية، والواقعة الثانية هى إقامة جورج بول G. Boole (١٨٥١ - ١٨٦٤) لما يُعْرَف باسم «جبر المنطق» algebra of logic(٢). وسنبدأ بالحديث عن الواقعة الأولى.

مع بداية القرن التاسع عشر قام علماء الرياضة بما يسمى حركة «النقد الداخلي» وهى حركة فكرية عند رياضي أوائل القرن الماضي جعلتهم ينصرفون عن التفكير في الاستزادة من الاكتشافات الرياضية والتوجه نحو فحص ونقد نظرياتهم الرياضية القائمة بقصد التثبت منها ومن سلامة براهينها(٣). ولقد ظهرت على السطح مشكلة فرضت نفسها وهى تسويغ صدق تلك البديهيات التي يبدأ بها النسق الرياضي. إن تبرير صدق البديهيات يمثل، في الواقع المشكلة الأساسية لكل علم(٤).

ظل نقد نسق البديهيات الخاص بالهندسة الاقليدية يُعَالج داخل إطار العلوم الرياضية،

---

(١) د. محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي - نشأته وتطوره، مؤسسة شباب الجامعة، الاسكندرية، الطبعة الثالثة، ١٩٧٩، ص ص ١٩ - ٢٠.

(2) Lee, Harold Newton, Symbolic Logic, Routledge and Kegan Paul Limited, London, 1962, p. 4.

(٣) د. محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، ص ٥٤.

(4) Reichenbach, H., The Philosophy of Space and Time, pp. 1 - 2.

وأدى التوسع في هذا النقد إلى كشوف متميزة(١). ولقد كانت نقطة البدء التي انطلق منها النقد هى البديهية الخامسة عند اقليدس(٢) والتي تنص على أنه:

«إذا قطع خط مستقيم خطين مستقيمين آخرين بحيث كان مجموع الزاويتين الداخلتين الموجودتين من جهة واحدة أقل من قائمتين، فإن المستقيمين المذكورين أو امتدادهما يتلاقيان».

وتسمى المشكلة الناجمة عن هذه البديهية **«بمشكلة التوازي»**. أدرك الرياضيون منذ زمن طويل أن تلك البديهية ليست واضحة كغيرها، وحاولوا إقامة البرهان على صحتها كنظرية من النظريات المبرهنة على أساس البديهيات الأخرى، أو بقبول بديهيات جديدة أكثر وضوحاً تنتجها(٣).

ظلت مشكلة التوازي تشغل الرياضيات طوال ما يزيد على ألفي عام قبل أن يتم التوصل إلى حل لها. فبعد حوالي عشرين عام من وفاة «كانط»، اكتشف رياضي مجرى شاب، هو جون بولياي Bolyai (١٨٠٢ - ١٨٦٠)، أن بديهية التوازي ليست عنصراً ضرورياً في الهندسة، فشيّد هندسة تخلى فيها عن بديهية التوازي وأحل محلها بديهية جديدة تقول بوجود أكثر من موازٍ واحد لمستقيم معين من نقطة معينة(٤). ويقال أن الرياضي الألماني جاوس Gauss (١٧٧٧ - ١٨٥٥) قد توصل في نفس الوقت تقريباً إلى فكرة مشابهة ولكنه أحجم عن نشرها(٥). ولكن الرياضي الروسي لوباتشفسكي Lobachevski (١٧٩٠ - ١٨٥٦) كان أول من نشر أبحاثه في تلك الهندسة عام ١٨٢٨، فَعُرِفَت باسمه تلك الهندسة التي اكتشفها جاوس من قبل(٦).

---

(1) Ibid., p. 2.

(2) Ibid., pp. 2 - 3.

(٣) د. محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، ص ٥٤.

(٤) ريشنباخ، نشأة الفلسفة العلمية، ص ١١٨.

(5) Reichenbach, H., The Philosophy of Space and Time, p. 3.

(٦) ريشنباخ. نشأة الفلسفة العلمية، ص ١١٨.

ولكن هذه الأبحاث لم تثر اهتماماً كافياً بخطر النتائج التي توصل إليها هؤلاء، وإنما تم ذلك حين نشر الرياضي الألماني ريمان Riemann (١٨٢٦ - ١٨٦٦) رسالة بعنوان «حول الفروض التي تقوم على أساسها الهندسة» ظهرت سنة ١٨٥٤. فلفت النظر إلى إمكان وجود هندسات لا اقليدية. ومن هذا التاريخ نمت الأبحاث والدراسات المتعلقة بهذه الهندسات الجديدة[١]. ولقد بدت هندسة ريمان في بادئ الأمر غير معقولة على الإطلاق وفارغة من المعنى، لاحتوائها على قضايا كتلك التي تقول إن مجموع زوايا المثلث أكثر من ١٨٠ درجة، أو إن العلاقة التي تربط محيط الدائرة بقطرها ليست هي: ط = ٣,١٤.[٢] ومع ذلك، فقد أثبتت الاختبارات الدقيقة أن هذه النظريات صحيحة تماماً، وأنها نسق فرضي استنباطي، وأن على المرء أن يعتادها[٣].

إن الهندسة التي قال بها ريمان قَبِلَ فيها، على خلاف اقليدس، إن المستقيم لا يمتد إلى ما لا نهاية، وإنما ينتهى حتماً (وهذا عكس البديهية الرابعة عند اقليدس التي تقبل مد الخط إلى ما لا نهاية). كما يقبل فيها أيضاً أن كل مستقيمين على سطح واحد لابد يلتقيان في نقطتين، فلا توجد، والحالة هذه، مستقيمات متوازية بالمعنى الاقليدي، وعلى العكس من ذلك تقبل هندسة لوباتشفسكي عدداً لا ينتهي من المستقيمات التي تمر كلها بنقطة واحدة خارج مستقيم ما[٤]. وهكذا تحل كثرة من الهندسات محل النسق الاقليدي الواحد.

والنتيجة الهامة التي نخلص إليها مما تقدم فيما يختص بأسس الهندسة هى أن البديهية الخامسة مستقلة منطقياً عن بقية بديهيات اقليدس[٥]. وفكرة الاستقلال هذه هامة للغاية لأنها تسمح لنا بأن نستبدل البديهية الخامسة بغيرها، بحيث إذا ضم بديل أو أكثر إلى البديهيات الأخرى تكّونت هندسات مختلفة متتابعة القضايا أو النظريات. ومن ثمّ كانت هناك ثلاث هندسات «هندسة اقليدس» التي افترضت أن المكان مستو استواءً أفقياً، وهندسة «لوباتشفسكي» التي افترضت أن المكان على شكل السطح الداخلي للأسطوانة،

---

(١) د. عبد الرحمن بدوي، مناهج البحث العلمي، ص ص ٣٥ - ٣٦.

(2) Reichenbach, H. From Copernicus to Einstein, p. 114.

(3) Ibid., p. 114.

(٤) د. محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، ص ٥٦.

(٥) المرجع السابق، ص ٥٨.

وهندسة «ريمان» التي افترضت أن المكان على شكل السطح الخارجي للكرة. ومن الناحية المنطقية لا تقل كل واحدة من هذه الهندسات أتساقاً واكتمالاً وصدقاً عن الهندسة الأخرى، رغم اختلاف - وربما تناقض - نتائج هذه الهندسات الثلاث، ولقد أدى هذا التطور إلى حالة لم يصادفها المناطقة على الاطلاق من قبل(١).

هذا عن الواقعة الأولى التي لعبت دوراً في نشأة المنطق الرمزي، أما الواقعة الثانية التي حدثت في منتصف القرن التاسع عشر أيضاً، وأثرت تأثيراً بالغاً على مستقبل تطور المنطق، فتتمثل - كما سبق أن ذكرنا - في إقامة «جورج بول» لما يسمى «بجبر المنطق»، إذ إن البداية الحقيقية لنشأة المنطق الرمزي إنما ترجع إلى عام ١٨٤٧ حين ظهر كتاب جورج بول «التحليل الرياضي للمنطق» Mathematical Analysis of Logic، وفي عام ١٨٥٤ ظهر كتاب آخر له بعنوان «بحث في قوانين الفكر» Investigation of the Laws of Thought. وقد رأى «بول» أنه يمكن تطبيق الجبر على الاستدلال القياسي الأرسطي لأن العلاقة الحملية هى علاقة بين فئات، إذ يمكن التعبير عن العلاقات القائمة بين الفئات بواسطة عمليات مشابهة لعمليات الجمع والضرب والطرح والقسمة الموجودة في علم الحساب. ولقد توصل «بول» إلى طريقة فنية لمعالجة المنطق وذلك باستخدام علم الجبر، وهذه الطريقة تزودنا بأداة دقيقة لتحليل منطق الرياضيات فضلاً عن تحليل المنطق ذاته(٢).

ولقد تم تعديل وتوسيع جبر بول على يد بعض المناطقة والرياضيين، إذ اقترح عالِم المنطق الإنجليزي «جيفونز» Jevons, W. S. تعديلاً على جانب كبير من الأهمية لعملية الجمع التي قال بها بول. كما توصل عالِم منطق إنجليزي آخر هو «جون فن» John Venn إلى طريقة لتوضيح عمليات الجبر بواسطة عدة أشكال ورسومات. ولقد كان الرياضي السويسري «أويلر» Euler، الذي ظهر في القرن الثامن عشر، قد توصل إلى طريقة لتوضيح الاستدلال القياسي باستخدام الدوائر، غير أن «فن» قام بتعديل طريقة استخدام الدوائر عند «أويلر»، مستعيناً في ذلك بفكرتين أساسيتين في جبر جورج بول، هما: فكرة

(1) Lee, Harold Newton, Symbolic Logic, p. 7.
(2) Ibid., p. 7.

الفئة الفارغة null class (أي الفئة التي ليس لها أعضاء)، وفكرة الفئة الكلية أو الشاملة Universal class (أي فئة الأشياء جميعها). ومن الملاحظ أن بعض كتب المنطق الموجودة اليوم تستخدم طريقة «فن» لتوضيح النظرية التقليدية في القياس دون أن تذكر أن فكرتي الفئة الفارغة والفئة الكلية لا تنتميان إلى المنطق التقليدي[١].

والواقع أن غالبية أهم التعديلات والإضافات على جبر بول قد جرت على يد كل من عالِم المنطق الأمريكي «تشارلز بيرس» Charles S. Peirce والرياضي الألماني «ارنست شرويدر» Ernst Schroder. فلقد ميّز «بيرس»، في بحثين صدرا له بتاريخ ١٨٦٧، تمييزاً حاسماً بين العمليات الحسابية والإجراءات المنطقية فيما يتعلق بالفئات[٢]، إذ أدرك «بيرس» خطأ «بول» في استخدامه لعمليتي الطرح والقسمة في جبر الفئات، وتصحيحاً لبول، ميّز «بيرس» بين العمليات الحسابية التي تعبر عن علاقات منطقية كالجمع والضرب، والعمليات الحسابية التي لا تعبر عن العلاقات كالطرح والقسمة، وهو تمييز لم يفطن إليه بول[٣]. كما توصل «بيرس» إلى علاقة جديدة، هي علاقة تَضَمُن فئة في فئة أخرى. ولقد توسعت معظم كتب الجبر اليوم في استخدام هذه العلاقة، وفضلاً عن ذلك استطاع بيرس الإشارة إلى فكرة الأسوار idea of quantifiers واختلاف القضية الكلية عن القضية الجزئية من حيث أن الأولى غير وجودية والثانية وجودية، وهي الفكرة التي تم تطويرها فيما بعد. كما توصل بيرس إلى نظرية العلاقات التي واصل «شرويدر» البحث فيها وتوسيعها[٤].

ونصل الآن إلى مرحلة لعلها أهم مرحلة في تطور المنطق الرمزي، وهي تلك المرحلة التي نستطيع أن نعدها - بشيء من التحفظ - التطور الأخير للمنطق الرمزي حتى الآن. وعادةً ما يُؤَّرخ لهذه المرحلة بظهور كتاب «التصورات» للمنطقي وعالِم الرياضيات الألماني «جوتلوب فريجه» Frege, F. G. (١٨٤٨ - ١٩٢٥) الذي نشره عام ١٨٧٩[٥].

---

(1) Ibid., pp. 7 - 8.

(2) Ibid., p. 8.

(٣) د. محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي - نشأته وتطوره، ص ص٩٥ - ٩٦.

(4) Lee, Harold Newton, Symbolic Logic, p. 8.

(٥) د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، ص ٣٨.

بدأ «فريجه» في تحليل مفاهيم علم الحساب بأداة منطقية جديدة، ففي عام ١٨٧٩ أصدر كتاباً بعنوان «التصورات - لغة صورية للفكر الخالص تحاكي لغة علم الحساب» Doctrine of Concepts, A Formalized Language of Pure Thought Modeled upon the Language of Arithmatic. وبعد ذلك بخمسة أعوام، أي عام ١٨٨٤ أصدر كتاباً آخر بعنوان «أسس علم الحساب: بحث منطقي - رياضي في مفهوم العدد»[1] The foundations of Arithmetic, A Logico-mathematical Inquiry into the Concept of Number. وضع فيه أسس منطقه الجديد ومحاولة لإقامة اتجاهه اللوجستيقي. ويقول الدكتور محمود فهمي زيدان: «إن عنوان هذا الكتاب مضلل من وجهتين: (أ) فهو يوحي بأنه بحث في منطق التصورات، بالرغم من أنه بحث في كل نظريات المنطق. (ب) كما يوحي بأنه بحث يرد المنطق إلى الحساب بالرغم من أنه بحث يرد الحساب إلى المنطق»[٢]. أما المؤلف الضخم لفريجه «المباديء الأساسية لعلم الحساب «The Foundations of Arithmetic، فقد صدر في جزئين نشر الجزء الأول عام ١٨٩٣ ونشر الجزء الثاني عام ١٩٠٣. ولم يتم الانتباه إلى أهمية هذه الأعمال إلا بعد أن قام «برتراند رسل» بتبسيطها وتوسيعها[٣].

وعلى الرغم من أن «فريجه» كان عميقاً أصيلاً في أفكاره المنطقية فإنه لم يجذب انتباه المناطقة إليه، ذلك لأن لغته الرمزية كانت صعبة الفهم والطبع. لقد كان عالم الرياضة الإيطالي «بيانو» G. Peano (١٨٥٨ - ١٩٣٢) أول من عرفه بعد خمس عشرة سنة بعد أن كتب «فريجه» كتابه المنطقي الأول، حينئذ أفاد بيانو من منطقه وفلسفته الرياضية، كما حاول ابتكار مصطلحه الرمزي للمنطق بحيث استطاع قرّاء «فريجه» أن يفهموه إذا ما استخدموا لغة بيانو. إن أول من كشف عن عبقرية «فريجه» بتفصيل لم يكن «بيانو» وإنما «رسل» حين عرفه عام ١٩٠١، وكان «بيانو» هو الذي أرشده إليه عام ١٩٠٠[٤].

هكذا بدأ منذ نهاية القرن التاسع عشر، وبداية القرن العشرين، الإتجاه إلى توسيع

(1) Lee, Harold Newton, Symbolic Logic, p. 9.

(٢) د. محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي - نشأته وتطوره، هامش ص ١٣٠.

(3) Lee, Harold Newton, Symbolic Logic, p. 9.

(٤) د. محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي - نشأته وتطوره، ص ١٣٢.

مفهوم المنطق، وكذا ازدياد الإتجاه إلى صياغة الرياضيات صياغة صورية مما ترتب عليه إظهار أن مجالي المنطق والرياضيات كانا يزدادان قرباً واقتراباً(١). فلقد أتاح بناء المنطق الرمزي البحث في العلاقات بين المنطق والرياضة من زاوية جديدة. فلماذا يوجد لدينا علمان مجردان للبحث في نواتج الفكر؟ قام برتراند رسل وألفرد نورث وايتهد. Whitehead, A. N. (١٨٦١ - ١٩٤٧) بدراسة هذه المسألة، وتوصلا إلى الإجابة القائلة إن الرياضة والمنطق آخر الأمر شيء واحد، وأن الرياضة ليست إلا فرعاً للمنطق وُجِهَت فيه عناية خاصة إلى التطبيقات الكمية. وقد عرضا هذه النتيجة في كتاب ضخم بعنوان «برنكبيا ماتيماتيكا»(*) Principia Mathematica، كُتِبَ بأكمله تقريباً بطريقة التدوين الرمزي للمنطق. وكانت الخطوة الحاسمة في البرهان على هذا الرأي هى تعريف «رسل «للعدد، فقد بين «رسل» أن الأعداد الصحيحة، وهى ١، ٢، ٣ إلخ، يمكن تعريفها من خلال التصورات الأساسية للمنطق فحسب. ومن الواضح أن مثل هذا البرهان لم يكن من الممكن الإتيان به بدون مساعدة من التدوين الرمزي، إذ إن لغة الكلمات أشد تشابكاً وتداخلاً من أن تعبر عن علاقات منطقية تتصف بهذا القدر من التعقيد(٢).

والواقع أن تطور المنطق المعاصر لا يرجع فقط إلى جهود وأبحاث المناطقة الذين سبقت الإشارة إليهم، إذ لا يمكن إغفال جهود كثير من المناطقة المعاصرين مثل « كوتيرا»

---

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ٢٦.

(*) كتاب «برنكبيا ماتماتيكا» يعتبر حداً فاصلاً بين عهدين للدراسة المنطقية، والغاية التي قصد إليها المؤلفان «رسل» و«وايتهد» من هذا الكتاب هى تحليل الرياضة تحليلا يردها إلى أصولها المنطقية، ثم تحليل المبادئ المنطقية نفسها تحليلاً ينتهى بنا إلى عدد قليل من الفروض التي منها نستطيع أن نستنبط كل قواعد المنطق وكل قواعد الرياضة معاً، بحيث تزول الفوارق بين الرياضة والمنطق. وكتاب «Principia Mathematica» (ومعناها «أصول الرياضة» من تأليف «برتراند رسل» و«وايتهد» يتألف من ثلاثة أجزاء: صدر الجزء الأول سنة ١٩١٠، والثاني سنة ١٩١١ والثالث سنة ١٩١٣ - وقد آثر الدكتور زكي نجيب محمود أن يحتفظ له باسمه الأصلي بين قراء العربية، إبرازاً لمكانته وقيمته من جهة، وتمييزاً له - من جهة أخرى - عن كتاب آخر لبرتراند رسل، عنوانه Principles of Mathematics ومعناها أيضاً «أصول الرياضة».

انظر: د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، الطبعة الأولى، هامش ص ٣٣٨.

(٢) ريشنباخ، نشأة الفلسفة العلمية، ص ١٩٥.

Couturat (١٨٦٨ - ١٩١٤) الفرنسي، و«رودلف كارناب» R. Carnap، و«ايتوري كاروتشيو» E. Carruccio الإيطالي، و«الونزو تشيرش» A. Church الأمريكي، وكذا كل من «سوزان لانجر» S. Langer و«سوزان استبنج» S. Stebbing. فضلاً عن مناطقة مدرسة وارسو البولندية مثل «يان لوكاشيفتش» J. Lukasiewicz (١٨٧٨ - ١٩٥٦) و«الفرد تارسكي» A. Tarski، وكوتاربنسكي T. Kotarbinski وغيرهم، الأمر الذي أدى إلى تطوير المنطق الرمزي المعاصر على الصورة التي يتبدى عليها الآن بعد منتصف القرن العشرين[1].

---

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ٢٧.

الفصل الثاني

الحساب التحليلي للقضايا

تمهيد

يُعَد الحساب التحليلي للقضايا أكثر أجزاء المنطق المعاصر أهمية، وأكثرها أولية. والأولية هنا لا تعني الأسبقية الزمنية، بقدر ما تعني الأولية المنطقية[1]. فمن المعروف أن نظرية حساب الفئات هي أولى نظريات المنطق الرمزي من الناحية التاريخية، (و«جورج بول» هو واضع مبادئها)، لكن لنظرية «حساب القضايا» propositional calculus سبقاً منطقياً عليها، لأنها الأساس الذي تقوم عليه نظرية الفئات وغيرها من نظريات المنطق الرمزي. ويرجع الفضل إلى «فريجه» في وضع مبادئها، وقد ساهم «بيانو «بجهده فيها، ويمثل كتاب «برنكبيا ماتيماتيكا» حلقة من حلقات تطوير هذه النظرية، ويُطْلِق عليها أصحاب برنكبيا أسم «حساب القضايا» أحياناً، و«نظرية الاستنباط» أحياناً أخرى، وللنظرية أسماء أخرى عند مناطقة أو كتّاب آخرين، مثل «نظرية دالات الصدق» Theory of truth- function، ونظرية «تركيب القضايا» theory of statement composition[2].

ونحن في الحساب التحليلي للقضايا لا نُدْخِل في اعتبارنا البنية المنطقية الداخلية للقضايا، بقدر اهتمامنا بالقضايا ككل من حيث ترابطها المنطقي وعلاقتها بغيرها أو بذاتها، حين تُتَّخَذ حيالها بعض الإجراءات المنطقية، الأمر الذي يترتب عليه التوصل إلى قضايا مركبة

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ١٣٩.

(٢) د. محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي، نشأته وتطوره، ص ٢٠٣.

هى أقرب إلى الدالات منها إلى القضايا[١]، أي أننا سوف نتعامل مع القضايا بغض النظر عما إذا كانت تعبر عن فئة أو عن حالة مفردة أو عن علاقة موضوع بمحمول. فبدلاً من تحليل البنية المنطقية للقضايا، سوف نقوم بتحديد وتعريف العلاقات الكائنة بين القضايا بعضها ببعض بواسطة قيم صدقها فحسب[٢]. ومن ثمّ فإن ما نعنيه بحساب القضايا هنا، إنما هو الحساب المنطقي الذي يتناول القضايا بدلاً من الأعداد، في صورة رمزية خالصة وفي صورة متغيرات وثوابت. وترمز المتغيرات هنا إلى قضايا لا إلى حدود، كما ترمز الثوابت إلى العلاقات بين تلك القضايا[٣]. ولتوضيح ذلك لابد أن نميز أولًا بين الثوابت والمتغيرات.

الثوابت والمتغيرات

نقصد بهاتين الكلمتين: «الثوابت» constants و«المتغيرات» variables في المنطق ما نقصده بهما في العلوم الرياضية كالحساب. فالرمز «الثابت» في الرياضة هو الذي لا يتغير معناه رغم اختلاف مواضعه، فالأعداد: ١، ٢، ٣، ٤ .... كلها ثوابت، لأن كل عدد منها له المعنى نفسه أينما ورد، و«الصفر»ثابت، لأن معناه كذلك لا يتغير، والرموز «+»، «-»، «x»، «÷»، «=» كلها كذلك ثوابت لأنها دائماً ذات دلالة واحدة لا تتغير بتغير سياقها ووضعها[٤].

وأما الرمز المتغير فهو عادةً يُخْتَار من أحرف الهجاء مثل: أ، ب، جـ، س، ص، .... إلخ، وليس «للمتغيرات» معنى بذاتها على الإطلاق، على عكس «الثوابت»، فبينما نعلم للثوابت معنى معلوماً محدداً يصاحبها أينما وردت، ترانا لا نجعل «للمتغيرات» معنى معلوماً محدداً يصاحبها أينما وُجِدَت، فنحن نعلم - مثلا - عن العدد «٢» أنه زوجي، وأنه عدد صحيح، وأنه هو الذي يتلو العدد «١» في سلسلة الأعداد، لكننا لا نعلم معنى الرمز «س» لأن معناه

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ١٣٩.

(2) Lee, Harold Newton, Symbolic Logic, p. 195.

(٣) د. محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي، نشأته وتطوره، ص ٢٠٤.

(٤) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، الطبعة الأولى، ص ١٥٤.

يتغير حسب ما نختاره له، فلو سُئِلنا: هل العدد «س» زوجي أم فردي؟ أجبنا بأنه لا سبيل إلى معرفة ذلك إلا إذا عرفنا المدلول الذي جاءت «س» معبرة عنه في هذا الموضع أو ذاك، فقد يكون هذا الرمز «المتغير» دالاً على عدد موجب، وقد يكون دالاً على عدد سالب، وقد يكون دالاً على «صفر»، ولما كانت الأعداد ليس فيها ما يجوز أن يكون أي شيء على هذا النحو، كان «المتغير» غير ذي معنى، ويظل كذلك حتى نضع مدلوله مكانه[١].

ومادام حديثنا سوف ينصرف إلى القضية ككل، لا إلى مكوناتها، فسوف نستخدم من الرموز ما يشير إلى القضايا، لذا سوف نرمز للقضايا بالرموز:

ق، ل، م، ......

والرمز «ق» مثلا يدل على قضية ما، من حيث هو «متغير»، ولا يدل على قضية معينة بالذات ومن ثمَّ فإن الرموز:

ق، ل، م، .....

هى متغيرات ترمز لأي قضايا، لا إلى قضايا بعينها. فالحرف «ق» - مثلاً - قد يكون رمزاً للقضية القائلة بأن «الشمس ساطعة» أو «سقراط فيلسوف» أو «٢ + ٢ = ٤» أو «الحديد يتمدد بالحرارة»... إلخ. وبالتالي فإننا لا نستطيع أن نحكم على القضية «ق» بأنها صادقة، كما لا نستطيع أن نحكم عليها بأنها كاذبة، وإنما هى تحتمل الصدق والكذب. من هنا يتضح ما سبق أن ذكرناه من أن «المتغير» هو ما لا يكون له معنى محدد، بل يكون أشبه بالمجهول الذي تظل قيمته غير معلومة إلى أن نضع بدلاً منه رمزاً محدد القيمة. أما الثابت فهو ما لا يتغير معناه بتغير السياق الذي يرد فيه، بل يأخذ معنى محدداً ثابتاً أينما ورد. ولذا يُعَرّفه «رسل» بأنه «ما يجب أن يكون شيئاً محدداً تحديداً مطلقاً لا إبهام فيه البتة»[٢]. أو هو «ما يلعب في التعبير اللغوي، أو الرمزي للقضايا المنطقية دوراً ثابتاً[٣]

(١) المرجع السابق، ص ص ١٥٤، ١٥٥.
(٢) رسل (برتراند)، أصول الرياضيات، الجزء الأول، ترجمة الدكتور / محمد مرسي أحمد والدكتور / أحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، القاهرة، ١٩٦٥، ص ٣٥.
(٣) المرجع السابق، ص ١١.

بحيث يكون له نفس الإسهام في دلالة القضية حيثما يرد، مثال ذلك: «أو»، «و»، «لا»، «إذا .... إذن»[١].

ويبدو أن تعبير «الثوابت المنطقية» من اصطناع «بيانو»، وسبق للرواقيين أن عرفوا بعضها وأطلقوا عليها اسم «روابط» Conectives. وعلى ذلك فإن الثابت المنطقي هو الحرف أو الكلمة أو مجموعة الكلمات التي تربط بين قضيتين بسيطتين أو أكثر[٢]. ويُطْلِق «ريشنباخ» على هذه الثوابت المنطقية التي تربط القضايا البسيطة بعضها ببعض اسم «الإجراءات القضائية» propositional operations[٣].

الاجراءات القضائية

ينظر «ريشنباخ» إلى «الاجراءات القضائية» بوصفها دالات Function للقضايا الأولية. وأهم هذه الاجراءات القضائية: «لا»، «أو»، «و»، «يلزم عنه»، «يكافئ». ويرى «ريشنباخ» أن بعض هذه التعبيرات قد تُسْتَخدم في اللغة الجارية لا للربط بين القضايا، وإنما لربط الألفاظ بعضها ببعض، كالقول بأن «زيداً أو عمر هو الذي سيذهب معك». غير أن ريشنباخ ينظر إلى هذه القضية على أنها صيغة مختصرة للقضية القائلة «سيصحبك زيد أو سيصحبك عمر»[٤].

وبالنسبة للاجراءات المنطقية - التي سبق أن ذكرناها - يستخدم ريشنباخ التدوين الرمزي التالي، واضعاً بجانبه اسم الاجراء المنطقي الخاص به[٥]:

---

(١) المرجع السابق، الموضع نفسه.

(٢) د. محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي - نشأته وتطوره، ص ١٨٤.

(3) Reichenbach, Hans, Elements of Symbolic Logic, The Free Press, The Macmillan Company, New York , p. 23.

(4) Ibid., p. 23.

(5) Ibid., p. 23.

~ ق	لا ق	نفي
ق v ل	ق أو ل	فصل، جمع منطقي
ق . ل	ق ول	عطف، ضرب منطقي
ق ⊃ ل	ق يلزم عنها ل	لزوم
ق ≡ ل	ق تكافئ ل	تكافؤ

وسوف نتناول بالشرح كل إجراء من هذه الاجراءات على حدة.

أولاً: رابطة النفي:

النفي Negation هو العلاقة المنطقية الأساسية. والعلامة المستخدمة في القيام باجراء النفي هى:

~

وهذه العلامة توضع قبل القضية المراد نفيها، فإذا كانت لدينا قضية ما «ق» وأردنا نفيها، فإننا نعبر عن نفي هذه القضية على النحو التالي:

~ ق

وتُقْرَأ هكذا:

«لا - ق»

أو «ليس ق »

أو «ق كاذبة»

أو «من الخطأ القول بأن ق صادقة».

ومسألة ما إذا كانت «ق» أو «~ ق» صادقة في الواقع الفعلي هى مسألة تخرج عن موضوع المنطق، لأن المنطق ينظر إلى القضية بوصفها وحدة صورية تدخل في علاقات مع

غيرها من القضايا. ونحن نتعامل مع «ق» بغض النظر عما إذا كانت ترمز إلى قضية صادقة أو كاذبة، مثبتة أو منفية[1]. وكل ما في الأمر هو أن «~ ق» تعبر عن نفي «ق» أو عن إنكار صدق ما تقوله «ق». ومن ثمّ فإذا كانت «ق» هى رمز للقضية التالية:

«الرصاص أثقل من الذهب»

فإن «~ ق» هى نفي أو إنكار لصدق القضية السابقة، ويمكن التعبير عنها على النحو التالي:

«الرصاص ليس أثقل من الذهب»

أو «من الكذب القول بأن الرصاص أثقل من الذهب»

ومن الواضح أن صدق «~ ق» أو كذبها يتقرر بعد معرفة صدق أو كذب القضية الأصلية التي هى «ق» في هذه الحالة. فإذا كانت «ق «صادقة كانت «~ ق» كاذبة، و إذا كانت «ق» كاذبة كانت «~ ق» صادقة. وتسمى القضيتان اللتان تكون إحداهما نفياً للأخرى بالقضيتين المتناقضتين Controdictory sentences فالقضية التي تناقض «ق» هى «~ ق»، والقضية التي تناقض «~ ق» هى «ق». وعلى الرغم من أنه لا يمكننا معرفة صدق أو كذب «ق» و«~ ق» إلا بعد تحديد صدق أو كذب «ق». فإنه يمكننا القول أن القضيتين المتناقضتين «ق» و«~ ق» لا تصدقان معاً ولا تكذبان معاً وذلك لأن صدق إحداهما يستلزم دائماً كذب الأخرى، والعكس صحيح[2].

والجدير بالتنويه أننا و إن كنا نستخدم لفظ «لا» not في معظم الأحيان للتعبير عن علامة النفي «~»، فإنه من الملاحظ أن التطابق بين هذه العلامة وبين لفظ «لا» غير تام، وذلك لأن علامة النفي «~» سوف نستخدمها دائماً للتعبير عن التناقض، في حين أن لفظ «لا» لا يأتي دائماً معبراً عن التناقض. فإذا نظرنا إلى القضية الآتية - مثلا - «بعض طالبات

(1) Schipper, Edith Watson and Achuh, Edward, A First Course in Modern Logic, Routledge & Kegan Paul, London, 1960, p. 7.

(2) Kegley, Charles W, and Kegley, Jacquely Ann, Introduction to Logic, University Press of America, Lanham, 1984, p. 227.

الجامعة يدخِّن السجائر» سنجد أنها لا تنفي أن بعض طالبات الجامعة لا يدخنَّ السجائر، ومن ثمّ فإن القضيتين «بعض طالبات الجامعة لا يدخِّن السجائر» و«بعض طالبات الجامعة يدخِّن السجائر» قد يصدقان معاً، فلفظ «لا» لم يعبّر هنا عن التناقض[١].

والواقع أن اجراء النفي يختلف عن الاجراءات الأخرى من حيث إنه لا يمكن تطبيقه إلا على قضية واحدة فقط، فهو إجراء أحادي من حيث إن الإجراءات الأخرى كالفصل واللزوم والعطف هى إجراءات ثنائية إذ تربط بين قضيتين[٢].

وقبل أن نترك إجراء النفي نود أن نتحدث عن مسألة هامة تتعلق به، وهى قانون النفي المزدوج Law of double negation. ولتوضيح معنى هذا القانون نقول: إنه إذا كانت «~ ق» تشير إلى القضية القائلة:

«إن طه حسين ليس عميداً للأدب العربي»

فإن «~~ ق» تشير إلى القضية القائلة:

«من الخطأ القول بأن طه حسين ليس عميداً للأدب العربي»

ومن الواضح أن القضية الأخيرة هى نفي لقضية منفية، وإذا قمنا بإلغاء هذا النفي المزدوج، فإننا سوف نحصل على القضية الآتية:

«طه حسين عميد الأدب العربي».

وهى قضية مثبتة تكافئ قضية النفي المزدوج. وذلك لأن نفي النفي إثبات. وإذا استخدمنا لغة رمزية، فإنه يمكننا أن نعبر عن ذلك على النحو الآتي:

ق ≡ ~ ~ ق

وُتقْرأ هكذا:

إن صدق «ق» يكافئ صدق «~ ~ ق».

---

(1) Ibid., p. 227.

(2) Reichenbach, Hans, Elements of Symbolic Logic, p. 23.

أو: إن «ق» تكافئ «~ ~ ق»

وهذا القانون يسري على كل القضايا، ويسمى بقانون النفي المزدوج.

وعادةً ما نضع «ق» بدلاً من «~ ~ ق».

ولنذكر دائماً أن نفي «~ ق» هو «ق»، كما أن نفي «ق» هو «~ ق»[١].

ثانياً: رابطة العطف:

دائماً ما تدخل القضية في علاقات مع غيرها من قضايا أخرى. والواقع أن العديد من القضايا يُصَرَّح بها بوصفها صادقة معاً[٢]. فإذا ما ذكرنا قضيتين (أو أكثر) وربطنا بينهما بالحرف «و»، ينتج لنا ما يسمى بالعطف Conjunction أو بحاصل الضرب المنطقي Product Logical. كما تسمى القضايا التي تم ربطها على هذا النحو بعناصر العطف members of conjunction أو بعوامل حاصل الضرب المنطقي[٣]. فإذا ما ربطنا بين القضيتين التاليتين مثلا:

«٢ عدد زوجي» ونرمز لها بالمتغير القضائي «ق»

«٢ أصغر من ٣» ونرمز لها بالمتغير القضائي «ل»

وهاتان قضيتان صادقتان، وإذا أردنا أن نربط بينهما برابطة العطف، فإنه يمكن التعبير عن ذلك على النحو الآتي:

٢ عدد زوجي وأصغر من ٣

وحيث أنه عادةً ما يُرْمَز إلى العطف بالرمز «.» (النقطة)، ويقوم الرمز بنفس الطريقة التي تقوم بها «واو» العطف، فإننا إذا استخدمنا متغيرات قضائية بدلاً من المفاهيم غير الصورية، لكانت صورة دالة العطف على النحو التالي:

---

(1) Schipper, Edith Watson and Schuh, Edward, A First Course in Modern Logic, p. 67.

(2) Ibid., p. 76.

(٣) تارسكي (ألفرد)، مقدمة للمنطق - ولمنهج البحث في العلوم الاستدلالية، ترجمة د. عزمي إسلام، مراجعة د. فؤاد زكريا، الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر، القاهرة، ١٩٧٠، ص ٥٥.

ق . ل

وتُقْرَأ هذه الصيغة هكذا:

إن «ق» و «ل» صادقتان معاً.

وذلك لأن إثبات عطف القضايا (أو أي قضيتين) مساوياً لتقرير صدق كلتا القضيتين اللتين تتكون منهما القضية العطفية. وإذا كان ذلك كذلك بالفعل، أي إذا كانت القضيتان صادقتين، كانت القضية العطفية صادقة، أما إذا كان أحد عناصر القضية العطفية على الأقل كاذباً، كانت القضية العطفية كاذبة[١]. وبعبارة موجزة نقول: إن العطف يصدق في حالة واحدة فقط وهى صدق المعطوفين معاً، ويكذب في بقية الحالات الأخرى[٢].

ويقال عن القضية العطفية إنها مساوية من الوجهة المنطقية للعناصر التي تتركب منها إذا أمكننا أن نستنتج من العناصر المعطوفة كيف يكون الحكم على النتيجة، وأن نستنتج من النتيجة كيف يكون الحكم على العناصر المعطوفة.

فالقضية العطفية «ق . ل» تعد مساوية منطقياً لعنصريها «ق» و «ل» في حالة واحدة فقط وهى الحالة التي يمكن فيها أن نحكم بأن:

١- (ق . ل) تلزم عنها ق.

٢- (ق . ل) تلزم عنها ل.

٣- «ق» و «ل» تلزم عنهما (ق . ل)[٣].

---

(١) المرجع السابق، الموضع نفسه.

(2) Degley Charles W., Introduction to Logic, p. 228.

(3) Popper, K. R., New Foundations of Logic.

وهو بحث منشور في مجلة Mind عدد يوليو سنة ١٩٤٧.

نقلاً عن:

دكتور زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، الطبعة الأولى، ص ١٤٣.

ويمكن أن نعبر عن الصيغ المنطقية السابقة على التوالي كالآتي:

١- أن صدق قضية العطف يستلزم صدق المعطوف الأول فيها.

٢- إن صدق قضية العطف يستلزم صدق المعطوف الثاني فيها.

٣ - إن صدق المعطوفين يستلزم صدق قضية العطف.

ومن ناحية أخرى فإن ترتيب القضايا في إجراء العطف لا يؤثر على صدق القضية العطفية. فإذا كانت «ق . ل» صادقة، تكون «ل . ق» صادقة أيضاً. ويسمى هذا باسم قانون التبادل Law of Commutation. ويمكن صياغته على النحو[1] التالي:

(ق . ل) ≡ (ل . ق).

فإذا قلنا أن:

حسام طالب بكلية الآداب و إبراهيم طالب بكلية الآداب

فإن هذا القول يكافئ القول بأن:

إبراهيم طالب بكلية الآداب وحسام طالب بكلية الآداب.

أي أن تبديل وضع عنصري العطف لم يؤثر على صدق القضية العطفية.

والجدير بالتنويه أننا وان كنا نستخدم حرف «الواو» and للتعبير عن علامة العطف التي هى النقطة «.» فإنه من الملاحظ أن التطابق بينهما ليس تطابقاً تاماً، وذلك لإننا سوف نستخدم النقطة «.» بحيث يمكنها أن تعبر دائماً عن إمكان التبادل بين عناصر العطف، في حين أن حرف «الواو» لا يأتي دائماً معبراً عن إمكان التبادل. فإذا نظرنا الى القضية الآتية مثلاً:

سعاد تزوجت من حسام وأنجبت طفلاً

حرف «الواو» في هذه القضية لا يعبر عن إمكان التبادل، إذ إننا لو قمنا بتبديل عنصري العطف على النحو التالي:

---

(1) Schipper, Edith Watson, A First Course in Modern Logic, p. 78.

أنجبت سعاد طفلاً وتزوجت من حسام

سنجد أن المعنى قد اختلف، وذلك لأن «الواو» في القضية الأولى لا تعبر عن العطف، وإنما تعبر عن الترتيب الزمني[1]. أي أن القضية تقول:

سعاد تزوجت من حسام ثم أنجبت طفلاً

وبالتالي فإن تبديل طرفي القضية يؤدي إلى اختلاف المعنى. والواقع أن استخدام «واو» العطف في المنطق لا يتعلق بمضمون العناصر المعطوفة، بل بقيم صدقها فحسب. فإذا قلنا:

٢ + ٢ = ٥ وأكلت الأيس كريم

فإنه يُعَد استخداماً صحيحاً لأداة العطف «و» لأننا نستخدمها في المنطق المعاصر بين قيم صدق القضايا وليس بين مضمون القضايا. وفي هذه الناحية يختلف استخدام أداة العطف «و» في المنطق عنه في لغة الحياة اليومية[٢].

ثالثاً: رابطة الفصل:

إذا كنا نستخدم حرف «الواو» للقيام باجراء العطف. فإننا في حالة الفصل disjunction نستخدم لفظ «أو»، وأحياناً نستخدم التعبير «إما ... أو» للربط بين القضايا، فنحصل على فصل بين هذه القضايا، وهو ما يسمى أيضا بحاصل الجمع المنطقي Logical Sum. وتسمى القضايا التي تكّون الفصل المنطقي باسم عناصر الفصل (أو البديلين). وتتمثل الصورة العامة للفصل في الصيغة التالية:

ق v ل

التي تعنى بصفة عامة القول بصدق واحدة من القضيتين «ق» أو «ل»، أو صدقهما

(1) Carney, James D., and Scheer, Richard K., Fundamentals of Logic, Macmillan Publishing Co., New York, 1980, pp. 178 - 179.

(٢) د. سهام النويهي، أسس المنطق الرياضي - رؤية حديثة، توزيع مكتبة النهضة المصرية، القاهرة، ١٩٨٧، ص ص ٤١ - ٤٢.

معاً. ويُلاحَظ أن العلامة «٧» التي ترد بين القضيتين فتربط بينهما في التعبير السابق، تعنى ما تعنيه الأداة «أو» التي تفيد الجمع addition أو الفصل في المنطق.

إن لفظ «أو» له معنيان مختلفان على الأقل في اللغة اليومية. ويمكن توضيح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

«عندما أذهب إلى الكلية اليوم سوف أرى محموداً أو حساماً»

في المثال السابق يتضح أن القضية الانفصالية تكون صادقة في حالة صدق أحد البديلين على الأقل، مع إمكان صدقهما معاً. فإذا كانت «ق» ترمز للقضية: «سوف أرى محموداً اليوم»، وكانت «ل» ترمز للقضية: «سوف أرى حساماً اليوم». أمكننا أن نعبر عن المثال السابق بالصيغة الرمزية الآتية:

ق ٧ ل

وتُقْرَأ هكذا:

«ق» أو / و «ل»

وهذا يعني صدق أحد الحالات الآتية:

١- أن تكون القضية «سوف أرى محموداً»، أي «ق» صادقة.

٢- أو أن تكون القضية «سوف أرى حساماً»، أي «ل» صادقة.

٣- أو أن تكون كلا من القضيتين «ق»، «ل» صادقة، فأرى محموداً وحساماً.

وعلى ذلك فإن القضية الانفصالية لا تكذب إلا في حالة واحدة فقط، وهى حالة كذب البديلين معاً.

والفصل الذي من هذا النوع يسمى «فصل ضعيف» Weak disjunction وأحياناً أخرى يُطْلَق عليه اسم «فصل غير استبعادي» nonexclusive disjunction. غير أن الفصل بين القضايا قد يكون قويًا، بمعنى أن البديلين لا يصدقان ولا يكذبان، فلابد من صدق أحدهما وكذب الآخر، مثال ذلك إذا قلت:

سوف أسافر إلى الإسكندرية إما بالطريق الزراعي أو بالطريق الصحراوي، لكان معنى ذلك أن إحدى القضيتان: «سوف أسافر بالطريق الزراعي» «سوف أسافر بالطريق الصحراوي» صادقة، ولا يمكن أن تصدق القضيتان معاً. فبينهما عناد تام، وبذلك لابد أن تكون إحداهما صادقة والأخرى كاذبة.

وَيُطْلَق على هذا النوع من الفصل اسم «الفصل القوي» strong disjunction، أو «الفصل الاستبعادي» exclusive disjunction.

والواقع أننا في حياتنا اليومية نستخدم لفظ «أو» للتعبير عن الفصل القوي، لأننا حينما نستخدم هذا اللفظ، فإننا نعنى الاختيار بين بديلين بحيث لا يتعدى واحداً منهما. هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى فإننا حتى لو اقتصرنا على تلك الحالات التي تُسْتَخدم فيها «أو» بالمعنى الضعيف فقط، فسنلاحظ أن هناك فرقاً بين استخدامها (بهذا المعنى) في اللغة العادية، وبين استخدامها في المنطق. ففي اللغة العادية، لا نربط بين قضيتين باستخدام «أو» إلا حينما تكون القضيتان مرتبطتين على نحو ما في الصورة أو المضمون. والواقع - كما يقول «تارسكي» Tarski -[1] أن طبيعة هذه الرابطة ليست واضحة تمام الوضوح، وكل وصف وتحليل تفصيلي لها قد يجعلنا نلتقي بصعوبات كثيرة. على كل حال، فإن أي شخص لا يعرف لغة المنطق المعاصر، أو لم يألفها، لا يجد في نفسه ميلاً للنظر إلى القضية الفصلية الآتية:

«٢ × ٢ = ٥ أو أن تكون نيويورك مدينة كبيرة»

على أنها تعبير له معنى، فضلاً عن عدم قبوله إياها على أنها قضية صادقة. وبالإضافة إلى ذلك فإن استخدام الحرف «أو» في اللغة اليومية يتأثر بعوامل معينة ذات طابع نفسي. فنحن عادةً لا نثبت أو نؤكد الفصل بين قضيتين إلا إذا كنا نعتقد أن إحداها صادقة، بدون أن نعرف أيتهما الصادقة. بل إننا أحياناً ننظر إلى القول بالفصل، بوصفه اعترافًا من القائل به بأنه لا يعرف أي عنصر من عناصر القضية الفصلية هو الصادق. وإذا ما نحن اقتنعنا أخيراً بأن القائل يعرف - في الوقت الذي يقول فيه القضية الفصلية - إن عنصراً محدداً من عناصرها

(١) تارسكي (ألفرد)، مقدمة للمنطق - ولمنهج البحث في العلوم الإستدلالية، ص ص ٥٧ - ٥٨.

كاذب، ويعرف على وجه التحديد أيهما هو الكاذب، كنا ميالين إلى القول بكذب القضية الفصلية كلها، حتى ولو كان العنصر الآخر غير مشكوك في صدقه.

ولنتصور مثلاً أن صديقاً أجاب - حين سُئِلَ عن موعد مغادرته المدينة - بقوله أنه سوف يغادرها اليوم أو غداً أو بعد غد. فإذا ما وثقنا بعد ذلك، إنه في الوقت الذي أجاب فيه بتلك الإجابة، كان قد قرر بالفعل أن يغادر المدينة في اليوم نفسه، تَوَلّد فينا إحساس بأنه كان يضللنا أو يكذب علينا.

والواقع أن المناطقة المعاصرين، بتناولهم لفظ «أو» بالتحليل، قد رغبوا - ربما لا شعورياً - في تبسيط معناه وجعل هذا المعنى أكثر وضوحاً واستقلالاً عن كل العوامل النفسية، وخاصةً ما يتعلق منها بوجود المعرفة أو عدم وجودها. وعلى ذلك فقد توسعوا في معنى لفظ «أو»، وقرروا أن فصل أي قضيتين هو قضية ذات معنى، حتى ولو لم تكن هناك رابطة أو علاقة تربط بين مضمونهما أو صورتيهما. كما قرروا أيضاً أن يكون صدق القضية الفصلية - مثل صدق النفي أو العطف - معتمداً كل الاعتماد على صدق عناصرها فقط.

وعلى ذلك فإن من يستخدم كلمة «أو» بالمعنى الذي تُسْتَخدم به في المنطق المعاصر، سوف ينظر إلى التعبير السابق ذكره، وهو:

«٢ × ٢ = ٥ أو أن تكون نيويورك مدينة كبيرة»

على أنه قضية ذات معنى، بل وحتى على أنه قضية صادقة، طالما أن الشطر الثاني منها صادق يقيناً. وبالمثل فإذا افترضنا أن صديقنا الذي سُئِلَ عن تاريخ مغادرته للمدينة، استخدم كلمة «أو» بمعناها المنطقي الدقيق، فإنه يلزم عن ذلك أن نعتبر إجابته صادقة، بغض النظر عن رأينا فيما كان يرمي إليه القائل أو يقصده. إذ إننا في مجال المنطق لا نهتم بما تعنيه «ق» أو «ل» أو غيرها من القضايا، بل نهتم بقيم الصدق فحسب والعلاقات القائمة بينها.

والجدير بالتنويه أن ترتيب القضايا في إجراء الفصل لا يؤثر على صدق القضية الانفصالية. فإذا كانت «ق ٧ ل» صادقة، تكون «ل ٧ ق» صادقة أيضاً. ويسمى هذا كما

سبق أن ذكرنا في حالة العطف باسم «قانون التبادل» Commutative law of disjunction الخاص بالانفصال، ويمكن صياغته على النحو التالي:

(ق ٧ ل) ≡ (ل ٧ ق)

فإذا قلنا:

إما أن يحضر حسام أو يحضر إبراهيم

فإن هذا القول يكافئ القول بأنه:

إما أن يحضر إبراهيم أو يحضر حسام

أي أن تبديل وضع البديلين في الفصل لا يؤثر على صدق القضية الانفصالية [1].

دوال الصدق المركبة من النفي والعطف والفصل:

لنفرض أنني قلت لك:

«هذا الرجل إما أنه جائع أو أنه متعب»

ولكنك تعترض على هذا القول وتريد أن تقول: «إنه من الخطأ القول بأن هذا الرجل ليس جائعاً وليس متعباً». فإنك في واقع الأمر إنما تؤكد ما سبق أن قلته أنا، ولكن بصيغة مختلفة.

فما قلته أنا هو:

«هذا الرجل إما أنه جائع أو أنه متعب»

فإذا رمزنا إلى القضية القائلة «هذا الرجل جائع» بالرمز «ق»

وإلى القضية القائلة «هذا الرجل متعب» بالرمز «ل»

فإنه يمكن صياغة ما قلته صياغة رمزية على النحو الآتي:

(ق ٧ ل)

---

(1) Schipper, Edith Watosn, A First Course in Modern Logic, p. 104.

أما ما قلته أنت فهو:

«من الخطأ القول بأن هذا الرجل ليس جائعاً وليس متعباً»

فإنه يمكن صياغة هذا القول صياغة رمزية على النحو الآتي:

~ (~ق . ~ ل)

ومن الواضح أن الصيغتين متكافئتان[1]، ويمكن التعبير عن هذا التكافؤ على النحو الآتي:

(ق v ل) . ≡ . ~ (~ق . ~ ل)

الفصل إذن يكافئ عطفاً منفياً حجته الأولى منفية وحجته الثانية منفية.

أما إذا قلت:

«هذا الرجل جائع ومتعب»

فإن صورتها الرمزية تكون كالآتي:

(ق . ل)

ثم جاء شخص آخر وأنكر أن يكون هذا الرجل جائع ومتعب في وقت واحد، وقال:

«إما أنه ليس جائعاً أو ليس متعباً»

فإن صورتها الرمزية تكون كالآتي:

(~ ق v ~ ل)

وإذا أردت تأكيد ما سبق أن قلته، فإن هذا يتطلب إنكار ما قاله هذا الشخص، فأقول:

«من الخطأ القول بأن هذا الرجل إما ليس جائعاً أو ليس متعباً»

---

(1) Mitchell, David, An Introduction to Logic, Hhtchinson University Library, London, 1967, p. 49.

فإن صورتها الرمزية تكون كالآتي:

~ (~ ق ٧ ~ ل)

ومن الواضح أن هذه الصيغة الأخيرة تكافئ الصيغة الأولى (ق . ل) التي بدأت بها كلامي[1]، ويمكن التعبير عن هذا التكافؤ على النحو الآتي:

(ق . ل) . ≡ . ~ (~ ق ٧ ~ ل)

العطف إذن يكافئ انفصالاً منفياً حجته الأولى منفية وحجته الثانية منفية.

وما دمنا بصدد الحديث عن النفي والعطف والفصل، فلابد لنا من الحديث عن قانونين هامين، هما قانونا دي مورجان. وهما قانونان يتعلقان بالفصل المنفي والعطف المنفي، وأُطْلِقَ عليهما هذا الاسم نسبةً إلى «دي مورجان» De Morgan (١٨٠٦ - ١٨٧١).

القانون الأول:

وصيغته الرمزية هى:

~ (ق ٧ ل) . ≡ . ~ ق. ~ ل

وينص هذا القانون على أن:

الفصل المنفي يكافئ عطفاً منفي الحجتين.

القانون الثاني:

وصيغته الرمزية هى: ~ (ق . ل) . ≡ . ~ ق ٧ ~ ل

وينص هذا القانون على أن:

العطف المنفي يكافئ فصلاً منفي الحجتين

(1) Ibid., p. 50.

استدلالات قائمة على الفصل:

إن رابطة الفصل تمدنا بصورة جديدة من صور الاستدلال، فالاستدلال الذي تكون مقدمته عبارة عن فصل مكون من قضيتين، وتكون مقدمته الثانية عبارة عن قضية واحدة مثبتة أو منفية، فإن نتيجته تكون قضية مثبتة أو منفية. ومن ثمَّ تكون لدنيا أربعة احتمالات، هي:

[(ق v ل) . ~ ق] ⊃ ل

[(ق v ل) . ~ ل] ⊃ ق

[(ق v ل) . ق] ⊃ ~ ل

[(ق v ل) . ل] ⊃ ~ ق

الاستدلال الأول من هذه الاستدلالات الأربعة، هو استدلال صحيح لأن مقدمته الأولى (الفصل)، تقول إن إحدى القضيتين على الأقل صادقة، بحيث إن مقدمته الثانية تقرر أن الحجة الأولى من الفصل كاذبة، لذا يمكننا أن نستنتج أن الحجة الثانية صادقة.

والاستدلال الثاني، هو استدلال صحيح، للسبب السابق نفسه. أما الاستدلالان الثالث والرابع فهما استدلالان باطلان، لأن الفصل (ق v ل) يعني أن إحدى القضيتين أو كليهما تكون صادقة ومن ثمَّ فإن صدق إحداهما لا يسمح لنا بأن نستدل على أن الأخرى كاذبة، إذ قد تكون القضيتان صادقتين.

وبعبارة موجزة يمكننا القول: بأن أي استدلال يتخذ صورة أياً من الاستدلالين الأولين يكون صحيحاً، وأن أي استدلال يتخذ صورة أياً من الاستدلالين الأخيرين يكون باطلاً[1].

صيغة التنافر:

يتم التعبير عن صيغة التنافر incompatibility بطريقة رمزية على النحو الآتي:

~ (ق . ل)

(1) Schipper, Edith Watson, A First Course in Modern Logic, pp. 107 - 108.

وتُقْرَأ هكذا:

إن «ق» و «ل» لا يصدقان معاً. أي أن هناك تضاد بين الطرفين. فهما إذا كانا لا يصدقان معاً، فإنه من الجائز لهما أن يكذبا معاً.

فإذا كانت لدينا قضيتان. القضية الأولى تقول:

«الشعب يتمتع بالحرية» ونرمز لها بالرمز «ق»

والقضية الثانية تقول:

«الشعب يتمتع بالمساواة» ونرمز لها بالرمز «ل»

فإن صيغة التنافر تكون على النحو الآتي:

~ (ق . ل)

«من الكذب القول بأن الشعب يتمتع بالحرية والمساواة معاً»

عندما نقوم بإجراء النفي على قضية عطفية، فماذا يعني هذا؟ هذا معناه أن القضيتين لا تصدقان معاً، فإحداهما على الأقل كاذبة، وقد تكون كلتاهما كاذبة. فالمثال السابق يمكن إعادة صياغته على النحو الآتي:

«إما أن الشعب لا يتمتع بالحرية أو لا يتمتع بالمساواة».

وإذا استخدمنا الرموز نفسها، ستكون لدينا الصيغة الرمزية الآتية:

~ ق v ~ ل

أي أن هناك تكافؤ بين صيغة التنافر والصيغة السابقة التي تعبر عن قضية انفصالية ذات حجتين منفيتين[1].

~ (ق . ل) . ≡ . ~ ق v ~ ل

وهو القانون الثاني لدى مرجان الذي سبق ذكره.

(1) Ibid., p. 114.

ملحوظة هامة:

يمكننا أيضاً التعبير عن صيغة التنافر بواسطة اللزوم والنفي.

فإذا قلنا:

«من المستحيل أن يكون العالَم مخلوقاً وقديماً معاً».

وصورتها الرمزية كالآتي:

~ (ق . ل)

فإن هذا القول يكافئ القول بأنه:

«إذا كان العالَم مخلوقاً لزم عن ذلك أنه ليس قديماً».

وصورتها الرمزية كالآتي:

(ق ⊃ ~ ل)

من الواضح أن الصيغتين متكافئتين، ويمكن التعبير عن هذا التكافؤ على النحو الآتي:

~ (ق . ل) . ≡ . (ق ⊃ ~ ل)

صيغة التنافر تكافئ لزوماً حجته الثانية منفية

استدلالات قائمة على التنافر:

إن صيغة التنافر تزودنا بنوع آخر من الاستدلال، فالاستدلال الذي تكون مقدمته الأولى عبارة عن علاقة تنافر بين قضيتين، وتكون مقدمته الثانية قضية واحدة مثبتة أو منفية (وهى إحدى قضيتي التنافر)، فإن نتيجته تكون هى القضية الأخرى مثبتة أو منفية. مرة أخرى ستكون لدينا أربعة احتمالات، هى:

[~ (ق . ل) . ق] ⊃ ~ ل

[~ (ق . ل) . ل] ⊃ ~ ق

[~ (ق . ل) . ~ ق] ⊂ ل

[~ (ق . ل) . ~ ل] ⊂ ق

الاستدلال الأول يقول باستحالة صدق القضيتين ق، ل معاً، ثم القول بصدق القضية «ق» في الوقت نفسه، يلزم عنه أن تكون القضية ل كاذبة. وهو استدلال صحيح. لأن المقدمة الأولى فيه تقرر عدم إمكان صدق القضيتين ق، ل معاً. في حين تقرر المقدمة الثانية فيه (وهي ق) أن إحدى القضيتين وهى «ق» صادقة. وعلى ذلك تكون الثانية كاذبة. وهى نتيجة تلزم عن المقدمتين. ومن ثمَّ فالاستدلال صحيح.

والاستدلال الثاني صحيح أيضاً للسبب السابق نفسه. أما الاستدلال الثالث فإنه يقول باستحالة صدق القضيتين ق، ل معاً ثم القول بكذب القضية ق، يلزم عنه أن تكون ل صادقة. وهو استدلال غير صحيح، لأن المقدمة الأولى تفيد عدم صدق القضيتين ق، ل معاً، لكنها لا تفيد عدم كذبهما معاً. أي لو كانت إحداهما صادقة للزم عن ذلك كذب الأخرى، أما إذا كانت إحداهما كاذبة (~ ق)، لما لزم عن هذا بالضرورة كذب الأخرى ولا صدقها، فهى قد تكون صادقة وقد تكون أيضاً كاذبة.

أما الاستدلال الرابع والأخير، فهو أيضا استدلال باطل، وذلك للسبب ذاته السابق.

وتلخيصا لما سبق نقول إن أي استدلال يأخذ صورة مشابهة للاستدلالين الأولين يكون صحيحاً. و إن أي استدلال يأخذ صورة مشابهة للاستدلالين الأخيرين يكون باطلا[1].

رابعاً: رابطة اللزوم

إذا ما ربطنا بين قضيتين بالألفاظ «إذا.... إذن....» لحصلنا على قضية مركبة تُعْرَف باسم قضية اللزوم implication أو القضية الشرطية conditional، وتسمى القضية الفرعية المسبوقة بالكلمة «إذا» بالمقدم. بينما تسمى القضية الرئيسية التي يقدم لها بالكلمة «إذن»

(1) Ibid., p. 119.

بالتالي[١]. وقد يكون المقدم عبارة عن قضية بسيطة أو مركبة وكذلك الأمر بالنسبة للتالي[٢]. ولنأخذ المثال الآتي:

إذا اجتهد الطالب نجح في الامتحان

هذه قضية لزومية تتألف من قضيتين:

القضية الأولى «اجتهد الطالب» وتسمى المقدم ولنرمز لها بالرمز «ق»

القضية الثانية «نجح الطالب في الامتحان» وتسمى التالي. ولنرمز لها بالرمز «ل» وسوف نستخدم هذه العلامة:

$\supset$

للتعبير عن أداة الربط «إذا... إذن....»

ومن ثمّ تكون لدينا الصيغ الرمزية الآتية:

ق $\supset$ ل

وتُقْرَأ هكذا:

إن صدق «ق» يستلزم صدق «ل»

أي أن صدق المقدم يستلزم صدق التالي

وهذا معناه أنه إذا صدق المقدم وكذب التالي تكون قضية اللزوم كاذبة.

ومما يجمل بنا ذكره في هذا الموضع، أن ثمَّة اختلافاً في طريقة استعمال القضية اللزومية، بين المنطق ولغة الحديث الجارية بين الناس، ففي لغة الحديث الجارية لا ننظر بعين الرضى إلى القضية اللزومية، إلا إذا كان هنالك شيئ من الارتباط في المعنى بين المقدم والتالي، فلا يجوز مثلاً أن نقول عبارة كهذه: «إذا كانت ٣ عدداً فردياً كانت (إذن) مدينة نيويورك

(١) تارسكي (ألفرد)، مقدمة للمنطق - ولمنهج البحث في العلوم الاستدلالية، ص ص ٥٨ - ٥٩.
(2) Kegley, Charles W., Introduction to Logic , p. 237.

كبيرة». أما المناطقة - والمعاصرون منهم بصفة خاصة - فقد أجمعوا الآن بغية الدقة والتوضيح في تحديد استعمال هذه الأداة الهامة «إذا... إذن...» على أن يوسعوا من استعمالها بحيث يقبلونها حتى إذا لم تكن هنالك رابطة إطلاقاً في المعنى بين المقدم والتالي، وجعلوا صدق اللزوم أو كذبه متوقفاً كل التوقف على صدق أو كذب المقدم والتالي فحسب. ولذا فهم يفرقون بين «اللزوم المادي» material implication الذي يتوقف على المعنى، و«اللزوم الصوري» formal implication الذي يهتم بالشكل الصوري وحده، ويُلاَحظ أن «اللزوم الصوري» أشمل وأوسع من «اللزوم المادي» إذ إن كل قضية لزومية فيها «لزوم مادي» بين مقدمها وتاليها، يكون فيها كذلك «لزوم صوري» لكن العكس غير صحيح.[١]

ولتوضيح الملحوظات السابقة، نذكر القضايا الأربع التالية:

إذا كانت ٢ × ٢ = ٤، كانت إذن نيويورك مدينة كبيرة.

إذا كانت ٢ × ٢ = ٥، كانت إذن نيويورك مدينة كبيرة.

إذا كانت ٢ × ٢ = ٤، كانت إذن نيويورك مدينة صغيرة.

إذا كانت ٢ × ٢ = ٥، كانت إذن نيويورك مدينة صغيرة.

ففي اللغة اليومية المعتادة، يكون من العسير قبول تلك الجمل السابقة على أنها ذات معنى، ويكون قبولها على أنها صادقة أمراً أصعب. أما في المنطق الرياضي فهى جميعاً قضايا ذات معنى. والقضية الثالثة فيها كاذبة (لأن المقدم صادق والتالي كاذب)، على حين أن الثلاث الأخريات صادقة[٢].

وهناك اعتراض يقول بأن المناطقة ينتهون بسبب استخدامهم لفكرة اللزوم المادي إلى مفارقات، بل وحتى إلى مجرد عبارات خالية من المعنى. ولقد نتج عن ذلك الاعتراض، المناداة باصلاح المنطق على نحو يُوَثِّق الصلة بين المنطق واللغة العادية بالنسبة لاستخدام اللزوم. ومن ثمَّ قام بعض المناطقة بمحاولات لاصلاح نظريات اللزوم. وهم لم ينكروا - بوجه عام -

(١) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، الطبعة الأولى، ص ص ١٤٥ - ١٤٦.
(٢) تارسكي (ألفرد)، مقدمة للمنطق، ص ٦٢.

على فكرة اللزوم المادي مكانتها في المنطق، ولكنهم كانوا حريصين على إفساح مكان في المنطق لفكرة أخرى خاصة باللزوم مثل الفكرة القائلة بأن إمكان استنتاج التالي من المقدم يكون شرطاً ضرورياً لصدق قضية اللزوم. بل إنهم يحاولون فيما يبدو أن يجعلوا لهذه الفكرة الجديدة مكان الصدارة. وترجع هذه المحاولات إلى عهد قريب، ولا يزال الوقت مبكراً للحكم على مدى قيمتها[١].

لكن ما يبدو الآن واضحاً، هو أن نظرية اللزوم المادي سوف تفوق أية نظرية أخرى في البساطة، كما أننا يجب ألا ننسى، على أية حال، أن المنطق الذي أُقِيَم على هذه الفكرة البسيطة، قد اتضح أنه أساس سليم لأكثر العمليات الرياضية تعقيداً ودقة.

عدة ملاحظات تتصل بعلاقة اللزوم بين القضايا، نوردها على النحو الآتي:

١- يجب التمييز في علاقة اللزوم بين «الشرط الكافي» sufficient condition و «الشرط الضروري» necessary condition إذ إن الشرط الكافي قد لا يكون شرطاً ضرورياً، والشرط الضروري قد لا يكون شرطاً كافياً[٢]. ويمكن توضيح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

فإذا قلنا إن:

«الأميرة princess فريال هي أكبر بنات الملك فاروق آخر ملوك مصر»

سندرك أن كونها «أميرة» princess يقتضي أن تكون «أنثى» female.

أنوثتها هي شرط ضروري كي تكون «أميرة»، غير أن امتلاك صفة «الأنوثة» ليس شرطًا كافيًا وحده كي تتصف صاحبته بأنها «أميرة princess»، لأن هناك كثيرات من الآنسات والسيدات لا حصر لهن لا ينطبق عليهن هذا الوصف.

فإذا كانت الأنوثة شرطًا ضروريًا - في هذه الحالة - فإنها لابد أن تكون هذه الأنثى منحدرة من أسرة ملكية «ابنة ملك مثلاً» حتى تكون جديرة بوصف «أميرة».

---

(١) المرجع السابق، ص ص ٦٣ - ٦٤.

(2) Schipper, Edith Watson, A First Course in Modern Logic, p. 82.

«أميرة» لابد أن يتوافر فيها، إذن شرط ضروري هو كونها أنثى وشرط كاف هو انتسابها للأسرة الملكية.

٢- إن علاقة اللزوم ليست علاقة متبادلة بين المقدم والتالي:

إذا كان صدق «المقدم» يستلزم صدق «التالي»، فإن العكس ليس صحيحاً، أي أن صدق «التالي» لا يستلزم صدق «المقدم»[1]. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال الآتي:

«إذا أمطرت السماء أبتلت الأرض»

ولنرمز للقضية القائلة:

«أمطرت السماء» بالرمز «ق»

ولنرمز للقضية القائلة:

«أبتلت الأرض» بالرمز «ل»

ومن ثمّ تكون الصيغة الرمزية للقضية اللزومية على النحو الآتي:

ق ⊃ ل

حيث «ق» هى المقدم، و «ل» هى التالي:

والآن، نلاحظ أن صدق «ق» هو شرط كاف لصدق «ل»، إذ إن صدق «المقدم» هو كل ما نحتاج إليه لإثبات صدق «التالي». فإمطار السماء كاف لإثبات أبتلال الأرض.

وفضلاً عن ذلك، فإن التالي «ل» هو شرط ضروري للمقدم «ق». فمن الضروري أن تكون «ل» صادقة حتى تكون «ق» صادقة. فالقضية القائلة: «أبتلت الأرض» لابد أن تكون صادقة، حتى تصدق القضية القائلة «أمطرت السماء». لأنه لو لم تكن الأرض مبتلة لما كان من الممكن القول بأن السماء قد أمطرت.

ومن ناحية أخرى، فإنه على الرغم من أن المقدم «ق» هو شرط كاف، فإنه ليس شرطاً ضرورياً - للتالي «ل»، ذلك لأن «إمطار السماء» ليس شرطاً ضرورياً «لإبتلال الأرض»،

---

(1) Ibid., p. 83.

بمعنى أنه ليس الشرط الوحيد لإبتلال الأرض. فالأرض قد تبتل بسبب آخر كانفجار ماسورة مياه مثلاً، ودون أن تمطر السماء. وعلى ذلك فالقضية اللزومية الآتية:

«إذا أمطرت السماء إذن تبتل الأرض»

لا تكافئ القضية القائلة:

«إذا أبتلت الأرض إذن تكون السماء قد أمطرت»

ولو أردنا أن نعبر عن عدم التكافؤ بينهما بطريقة رمزية فسيكون على النحو الآتي:

ق ⊂ ل ≢ ل ⊂ ق

وتُقْرَأ هكذا:

إن القول بأن صدق القضية «ق» يستلزم صدق القضية «ل» لا يكافئ القول بأن صدق القضية «ل» يستلزم صدق القضية «ق»

٣- إن كذب «المقدم» لا يستلزم « كذب» التالي:

لقد عرفنا أن صدق «المقدم» يستلزم «صدق» التالي.

والسؤال الآن: هل كذب «المقدم» يستلزم كذب «التالي»؟ الواقع إن كذب المقدم لا يستلزم كذب التالي. فإذا نظرنا إلى القضية اللزومية التي لدينا:

«إذا أمطرت السماء أبتلت الأرض»

نجد أنها لا تكافئ القضية اللزومية القائلة:

«إذا لم تمطر السماء لن تبتل الأرض»

والتي صيغتها الرمزية:

~ ق ⊂ ~ ل

وذلك لأن القضية القائلة «أمطرت السماء» ليست شرطاً ضرورياً - أي ليست الشرط الوحيد - «لإبتلال الأرض». ومن ثمّ فإن القضية الأولى «المقدم» لابد أن تكون صادقة كي

تصدق القضية الثانية «التالي». لأنه حتى لو لم تمطر السماء فإن الأرض قد تبتل. ويمكن التعبير عن ذلك على النحو الآتي:

ق ⊂ ل ≢ ~ ق ⊂ ~ ل

وتُقْرَأ هكذا:

إن القول بأن صدق «ق» يستلزم صدق «ل»، لا يكافئ القول بأن كذب «ق» يستلزم كذب «ل».

٤- إن كذب «التالي» يستلزم كذب «المقدم»:

ويطلق على اللزوم في هذه الحالة اسم اللزوم العكسي counter implication وتكون صيغته الرمزية على النحو الآتي:

~ ل ⊂ ~ ق

ويُقْرَأ هكذا:

إن كذب «ل» يستلزم كذب «ق»

ويمكن توضيح ذلك من خلال نفس المثال الخاص بإمطار السماء القائل:

«إذا أمطرت السماء أبتلت الأرض»

فإذا قمنا بتبديل وضع المقدم والتالي مع نفي كلا منهما. فسوف نحصل على القضية اللزومية الآتية:

«إذا لم تبتل الأرض فإن السماء لن تكون قد أمطرت»

ومن الملاحظ أن هذه القضية اللزومية الأخيرة تكافئ القضية الأصلية التي لدينا. ويمكن التعبير عن هذا التكافؤ بالصيغة الرمزية على النحو الآتي:

ق ⊂ ل ≡ ~ ل ⊂ ~ ق

وتُقْرَأ هكذا:

إن القول بأن «ق» تستلزم «ل»، يكافئ القول بأن كذب «ل» يستلزم كذب «ق».

وتسمى هذه الصيغة أحياناً باسم مبدأ عكس النقيض.

وهكذا نكون قد أوضحنا معنى اللزوم من خلال أمثلة مأخوذة من لغة الحديث الجارية. وكانت صيغتها الرمزية هي:

(ق ⊃ ل) ≢ (ل ⊃ ق)

(ق ⊃ ل) ≢ (~ ق ⊃ ~ ل)

(ق ⊃ ل) ≡ (~ ل ⊃ ~ ق)

إن منطق القضايا يُعرِّف ويؤسِّس مثل هذه النتائج بوصفها سمات للقضايا اللزومية. ولقد أطلق «رسل» Russell و«وايتهد» Whitehead في كتابهما «برنكبيا ماتيماتيكا» على هذا النوع من اللزوم اسم «اللزوم المادي»[1]. ونحن سوف نستخدم اللزوم بهذا المعنى.

٥- إن اللزوم بين القضايا يكون متبادلاً في حالة واحدة فقط، هي حين يكون هناك تكافؤ بين المقدم والتالي:

فلو كانت القضية «ق» تكافئ القضية «ل»، فإن صدق «ق» يستلزم صدق «ل» وصدق «ل» يستلزم صدق «ق».

ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً على النحو الآتي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)]

وتسمى هذه الصيغة أحياناً باسم القانون الأول للتكافؤ المادي. أما القانون الثاني للتكافؤ المادي، فإنه يمكن صياغته على النحو الآتي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق . ل) v (~ ق . ~ ل)]

ويُقْرَأ هكذا:

إن القول بأن «ق» تكافئ «ل» يكافئ القول بأنه إما أن تكون «ق» و «ل» صادقتان معاً أو «ق» و «ل» كاذبتان معاً.

(1) Ibid., p. 83.

٦- قانونا اللزوم المادي:

وهما عبارتان من عبارات التكافؤ، وتقدمان لنا تعريفين متميزين للزوم المادي:

أولاً: ق ⊃ ل . ≡ . ~ ق ∨ ل

وتُقْرَأ:

إن القول بأن «ق» تستلزم «ل»، يكافئ القول بكذب «ق» أو صدق «ل».

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال الآتي:

«إذا كانت هذه زرافة يلزم عن ذلك أن رقبتها طويلة»

ق ⊃ ل

فإنها تكافئ القضية الآتية:

«إما أن هذه ليست زرافة أو أن رقبتها طويلة»

~ ق ∨ ل

أي أن:

ق ⊃ ل . ≡ . ~ ق ∨ ل

وهذا معناه:

إن اللزوم يكافئ فصلاً حجته الأولى منفية وحجته الثانية مثبتة

ثانياً: ق ⊃ ل . ≡ . ~ (ق. ~ ل)

وتُقْرَأ:

إن القول بأن «ق» تستلزم «ل»، يكافئ القول بكذب أن تكون «ق» صادقة، وأن تكون «ل» كاذبة في وقت واحد.

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال الآتي:

«إذا كانت هذه زرافة يلزم عن ذلك أن رقبتها طويلة»

ق ⊂ ل

فإنها تكافئ القضية القائلة:

«من الخطأ القول بأن هذه زرافة ورقبتها ليست طويلة في وقت واحد».

ق ⊂ ل . ≡ . ~ (ق . ~ ل)

وهذا معناه:

أن اللزوم يكافئ عطفاً منفياً حجته الأولى مثبتة وحجته الثانية منفية

٧- تعريف الفصل بواسطة اللزوم والنفي:

ق v ل . ≡ . ~ ق ⊂ ل

وتُقْرَأ هكذا:

إن القول بأنه إما أن تصدق «ق» أو «ل» يكافئ القول بأن كذب «ق» يستلزم صدق «ل»

ولنأخذ المثال الآتي لتوضيح ذلك:

«إما أن تشرب هذه القطة الماء أو تموت من العطش»

وهى قضية انفصالية كما هو واضح، وصيغتها الرمزية، هى:

ق v ل

وهذه القضية تعنى:

«إذا لم تشرب القطة الماء فسوف يلزم عن ذلك موتها»

~ ق ⊂ ل

وتكون هذه الصيغة مساوية للصيغة ق v ل، وبذلك يكون لدينا التكافؤ الآتي:

ق v ل . ≡ . ~ ق ⊂ ل

٨- تعريف العطف بواسطة اللزوم والنفي:

ق . ل . ≡ . ~ (ق ⊂ ~ ل)

وتُقْرَأ هكذا:

إن القول بصدق «ق» و «ل» معاً، يكافئ القول باستحالة أن صدق «ق» يستلزم كذب «ل».

ولنأخذ المثال الآتي(*) لتوضيح ذلك:

لنفرض أنني قلت لأحد أصدقائي:

«أمس اشتريت قميصاً وحذاءً»

وكان صديقي يعرف حالتي المالية، ولذلك استبعد حدوث مثل هذا الأمر. إن إنكار هذا الصديق لقولي:

«اشتريت القميص والحذاء»

إنما يعني أنني إذا استطعت أن اشترك القميص لعجزت عن شراء الحذاء. فإذا حدث واشتريت القميص يترتب على ذلك عدم شرائي للحذاء، أي:

ق ⊂ ~ ل

ولكن لنفرض أنني أنكرت على صديقي مثل هذا الزعم، وقلت له:

إن قولك بأن «شرائي للقميص لزم عنه عدم شرائي للحذاء» قول خاطئ.

أي:

~ (ق ⊂ ~ ل)

لكان معنى ذلك أنني استطعت أن أشترى الأثنين معاً، الحذاء والقميص.

(*) المثال مأخوذ من كتاب الدكتور محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، ص ٨٩.

وبذلك يكون لدينا التكافؤ الآتي:

ق . ل . ≡ . ~ (ق ⊃ ~ ل)

العطف يكافئ لزوماً منفياً حجته الأولى مثبتة والثانية منفية

استدلالات قائمة على اللزوم:

سوف نتناول الآن بعض الاستدلالات القائمة على أساس اللزوم بغية التحقق من صحة هذه الاستدلالات أو بطلانها. ولقد سبق أن أوضحنا أنه في أي استدلال إنما ننتقل فيه من مقدمات نسلم بصحتها إلى نتيجة تلزم عنها. فإذا كانت النتيجة تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات فإن الاستدلال يكون صحيحاً، أما إذا لم يتحقق هذا اللزوم الضروري بين النتيجة والمقدمات فإن الاستدلال يكون باطلاً.

هذه العلاقة بين المقدمات والنتيجة هي موضوع الدراسة المنطقية. فما هي طبيعة هذه العلاقة؟ ومتى تكون هذه العلاقة صحيحة ومتى تكون باطلة؟ إن العلاقة التي يمكن عن طريقها تبرير الاستدلال هي علاقة لزومية. ولقد سبق أن أوضحنا أن العلاقة اللزومية إنما تقوم بين قضيتين بحيث يؤدي صدق القضية الأولى (المقدم) إلى صدق القضية الثانية (التالي)، في حين أن صدق القضية الثانية لا يستلزم صدق القضية الأولى. أما كذب القضية الأولى فإنه لا يستلزم كذب القضية الثانية، أما كذب القضية الثانية فإنه يؤدي إلى كذب القضية الأولى[1].

والواقع أن مشكلة إثبات ما إذا كان الاستدلال صحيحاً أم باطلاً، إنما ترجع إلى تحديد أي القضايا هي التي تلزم عن الأخرى. ومن خلال علم المنطق تم الاهتداء إلى مجموعة أساسية من العلاقات اللزومية التي يتم من خلالها - على الدوام - لزوم بعض القضايا عن بعضها الآخر. ويمكن حصر هذه العلاقات اللزومية على النحو الآتي[2]:

١- [(ق ⊃ ل) . ق] ⊃ ل

---

(1) Ibid., p. 86.

(2) Ibid., pp. 86 - 87.

٢- [(ق ⊂ ل). ل] ⊂ ق

٣ - [(ق ⊂ ل). ~ ق] ⊂ ~ ل

٤ - [(ق ⊂ ل). ~ ل] ⊂ ~ ق

إن الاستدلال الأول هو أشهر صورة من صور الاستدلال الصحيح. فهو عادةً ما يُنْظَر إليه على أنه مصادرة postulate منطقية لابد من التسليم بصدقها لقيام أي استدلال منطقي. وهو يُسْتَخدم في مجال الرياضيات وفي مجال الاستدلالات العلمية أيضاً. وقد عُرِفَ هذا الاستدلال منذ قرون بوصفه استدلالاً صحيحاً. ويُطْلَق عليه باللغة اللاتينية اسم modus ponens (وهى اختصار لعبارة modus ponends ponens) أي قياس الإثبات بالإثبات أو الوضع بالوضع the mode of affirming by affirming[١].

إن الاستدلال الأول - كما هو واضح - يتكون من مقدمتين، المقدمة الأولى عبارة عن قضية لزومية تقول إن صدق «ق» يستلزم صدق «ل»، أما المقدمة الثانية فهى عبارة عن قضية واحدة تقول أن «ق» صادقة. وحيث إن صدق «ق» كاف لكي تكون «ل» صادقة، إذن «ل» صادقة، وصدق النتيجة يؤكد صحة الاستدلال.

والاستدلال الرابع (من الاستدلالات السابقة) هو استدلال صحيح أيضاً، على النحو ذاته الذي يصح به الاستدلال الأول. ويُطْلَق عليه باللغة اللاتينية اسم Modus tollens (وهى اختصار لعبارة modus tollends tollens) أي قياس الرفع بالرفع the mode of denying by denying[٢].

أما الاستدلال الثاني والذي صيغته:

[(ق ⊂ ل) . ل] ⊂ ق

فهو استدلال باطل، لأن نتيجته لا تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، إذ إن صدق

(1) Ibid., pp. 87 - 88.

(2) Ibid., p. 88.

التالي «ل» لا يستلزم صدق المقدم «ق». وقد أوضحنا من قبل أن «ق ⊂ ل» لا تكافئ «ل ⊂ ق». وعلى ذلك فإن المقدمتين في هذا الاستدلال لا تستلزمان النتيجة، ومن ثمّ فهذا الاستدلال باطل. وأي استدلال يتخذ صورة هذا الاستدلال يكون باطلا و يُعْرَف، تقليدياً، باسم مغالطة إثبات التالي fallacy affirming the consequent[1].

والاستدلال الثالث والذي صيغته:

[(ق ⊂ ل) . ~ ق] ⊂ ~ ل

هو أيضاً استدلال غير صحيح. وذلك لأنه كما سبق أن أوضحنا أن «ق ⊂ ل» لا تكافئ «~ ق ⊂ ~ ل»، وحيث إن هذا الاستدلال يقول بأن كذب «ق» يستلزم كذب «ل»، لذا فهو استدلال غير صحيح، وأي استدلال يتخذ صورة هذا الاستدلال يكون باطلاً، وهو الذي يُعْرَف تقليدياً، باسم مغالطة إنكار المقدم fallacy denying the antecedent[2].

والآن، وعلى ضوء الاستدلالات الأربعة التي ذكرناها، لو كانت لدينا الصيغ اللزومية الآتية مثلاً:

١- [(م ⊂ ~ ن) . م] ⊂ ~ ن

٢- [(~ م ⊂ ~ ن) . ن] ⊂ م

٣- [(~ م ⊂ ن) . م] ⊂ ~ ن

٤- [(~ م ⊂ ن) . ن] ⊂ ~ م

وأردنا أن نتبين ما إذا كانت معبرة عن استدلالات صحيحة أم لا، فإننا نلجأ إلى تحويل هذه الصيغ بقدر الإمكان إلى الصيغ العامة اللزومية المعبرة عن الاستدلالات، بحيث تصبح الصيغة التي تتحول إلى صيغة أساسية معبرة عن استدلال صحيح، هى بدورها صيغة لزومية معبرة عن استدلال صحيح، و إلا كانت معبرة عن استدلال غير صحيح، وذلك كما يلي:

---

(1) Ibid., p. 88.
(2) Ibid., p. 88.

١- في الصيغة الأولى: [(م ⊂ ~ ن) . م] ⊂ ~ ن

لو وضعنا «ق» بدلاً من «م»، ووضعنا «ل» بدلاً من «~ ن» فإننا نحصل على:

[(ق ⊂ ل) . ق] ⊂ ل

وهى صيغة صحيحة لأن صورتها تتفق مع صورة الاستدلال الأول (من الاستدلالات الأربعة التي سبق أن ذكرناها). وحيث إننا عرفنا أن الاستدلال الأول صحيح، إذن فإن الصيغة المطلوب البرهنة عليها صحيحة، لأنها تعبر عن استدلال صحيح.

٢- في الصيغة الثانية: [(~ م ⊂ ~ ن) . ن] ⊂ م

لو وضعنا «ق» بدلاً من «~ م»، ووضعنا «ل» بدلاً من «~ ن»، لحصلنا على:

[(ق ⊂ ل) . ~ ل] ⊂ ~ ق

وهى صيغة صحيحة لأن صورتها تتفق مع صورة الاستدلال الرابع (من الاستدلالات الأربعة التي سبق أن ذكرناها). وحيث إننا عرفنا أن الاستدلال الرابع صحيح، إذن فإن الصيغة المطلوب البرهنة عليها صحيحة و إنها تعبر عن استدلال صحيح.

٣- وفي الصيغة الثالثة: [(~ م ⊂ ن) . م] ⊂ ~ ن

لو وضعنا «ق» بدلاً من (~ م)، ووضعنا «ل» بدلاً من «ن»، لحصلنا على:

[(ق ⊂ ل) . ~ ق] ⊂ ~ ل

وهى صيغة غير صحيحة لأن صورتها تتفق مع صورة الاستدلال الثالث (من الاستدلالات الأربعة التي سبق أن ذكرناها). وحيث إننا عرفنا أن الاستدلال الثالث غير صحيح، إذن فالصيغة المطلوب البرهنة عليها غير صحيحة، لأنها تعبر عن استدلال غير صحيح.

٤- وفي الصيغة الرابعة: [(~ م ⊂ ن) . ن] ⊂ ~ م

لو وضعنا «ق» بدلاً من «~ م». ووضعنا «ل»بدلاً من «ن» لحصلنا على:

[ق ⊂ ل) . ل] ⊂ ق

وهى صيغة غير صحيحة لأنها تتفق في صورتها مع صورة الاستدلال الثاني (من الاستدلالات الأربعة التي سبق أن ذكرناها). وحيث إننا عرفنا أن الاستدلال الثاني غير صحيح، إذن فالصيغة المطلوب البرهنة عليها غير صحيحة، لأنها تعبر عن استدلال غير صحيح[(١)].

متسلسلة اللزوم:

يمكن توضيح متسلسلة اللزوم implicative series من خلال المثال الآتي:

«إذا اجتهد الطالب نجح في الامتحان، وإذا نجح الطالب في الامتحان حصل على جائزة. يلزم عن ذلك أنه إذا اجتهد الطالب حصل على جائزة».

من الواضح أن هذا البرهان صحيح ومألوف، ونحن نستخدمه دائماً في استدلالاتنا اليومية[(٢)]. فإذا رمزنا إلى القضية القائلة:

«اجتهد الطالب» بالرمز «ق»

ورمزنا إلى القضية القائلة:

«نجح الطالب» بالرمز «ل»

ورمزنا إلى القضية القائلة:

«حصل الطالب على جائزة» بالرمز «م»

لكانت الصورة الرمزية لهذه الصيغة المنطقية على النحو الآتي:

[(ق ⊂ ل) . (ل ⊂ م)] ⊂ (ق ⊂ م)

والآن، فإن هذه الصيغة المنطقية التي تسمى «متسلسلة اللزوم»، هى صيغة صحيحة. وتتضح صحتها من خلال القوانين المنطقية وأيضاً من خلال صور الاستدلالات الأربعة التي سبق أن ذكرناها. ومع ذلك فإن هذه الصيغة غالباً ما يتم تقديمها بوصفها خاصية

---

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ص ١٦٣ - ١٦٤.

(2) Schipper, Edith Watson and Schuh, Edward, A First Course in Modern Logic, p. 133.

أساسية لنوع من العلاقات اللزومية يُطلَق عليه العلاقة المتعدية transitive، وتكون العلاقة متعدية حينما تتعدى الربط بين حدين إلى حد ثالث. ومن أمثلة العلاقات المتعدية المألوفة الأخرى هى «أقل من»، «أكبر من»، «يساوي»[1].

ويمكننا أن نضع بعض القواعد الأساسية التي لابد من توافرها في أي متسلسلة لزومية صحيحة، وهى[2]:

١- أن يكون مقدم النتيجة هو نفسه مقدم المقدمة الأولى.

٢- أن يكون تالي النتيجة هو نفسه تالي المقدمة الثانية.

٣- أن يكون تالي المقدمة الأولى هو نفسه مقدم المقدمة الثانية.

ويمكن توضيح هذه القواعد الأساسية من خلال الشكل الآتي:

(ق ⊂ ل) . (ل ⊂ م) : ⊂ : (ق ⊂ م)

مقدم المقدمة الأولى

تالي المقدمة الأولى

مقدم المقدمة الثانية

تالي المقدمة الثانية

مقدم النتيجة

تالي النتيجة

---

(1) Ibid., pp. 133.

(2) Ibid., pp. 133 - 134.

تطبيقات على متسلسلة اللزوم:

إننا في المنطق الرمزي المعاصر لا نستدل فقط على صدق قضية ما، بناء على صدق قضية أخرى مكافئة لها - على النحو سالف الذكر - بل نستدل كذلك على صحة استدلال ما، بناء على صحة استدلال آخر صحيح مكافئ له في الصورة والصياغة.

وفيما يلي أمثلة[1] على بعض الاستدلالات الصحيحة، والتي تستند صحتها على أساس مقارنتها بمتسلسلة اللزوم، ولنبدأ بالاستدلال الآتي:

[(ن ⊂ م) . (و ⊂ ~ م)] ⊂ (و ⊂ ~ ن)

هذه الصيغة تعبر عن استدلال صحيح، ولكي نثبت ذلك علينا أن نردها إلى الصورة التي تستوفي الشروط الثلاثة لمتسلسلة اللزوم التي سبق أن ذكرناها. وسنتبع في ذلك الخطوات الآتية:

١- لكي يكون المقدم في النتيجة هو المقدم في المقدمة الأولى، نقوم بتغيير وضع المقدمتين فنضع الأولى مكان الثانية، والثانية مكان الأولى، باستخدام قانون التبادل، وكما أننا نقول في قانون التبادل الخاص بالعطف إن:

(ق . ل) ≡ (ل . ق)

فإننا نكتب في هذه الحالة:

(ن ⊂ م) . (و ⊂ ~ م) : ≡ : (و ⊂ ~ م) . (ن ⊂ م)

ومن ثمّ تصبح الصيغة الأصلية على النحو الآتي:

(و ⊂ ~ م) . (ن ⊂ م) : ⊂ : (و ⊂ ~ ن)

٢- ثم بعد ذلك لكي نحصل على قضية مشتركة بين المقدمتين - تساعدنا على الاستمرار في الاستدلال - فإننا نضع بدلاً من المقدمة الثانية وهى (ن ⊂ م) قضية اللزوم العكسي المكافئة لها، وهى (~ م ⊂ ~ ن) ومن ثمّ نحصل على:

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ص ١٧٦ - ١٧٧.

(و ⊃ ~ م) . (~ م ⊃ ~ ن) : ⊃ : (و ⊃ ~ ن)

٣- فإذا ما وضعنا:

ق بدلاً من و

، ل بدلاً من ~ م

، م بدلاً من ~ ن

فإننا نحصل على:

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ق ⊃ م)

وهى صورة لمتسلسلة لزوم صحيحة تستوفي الشروط الثلاثة السابقة. وبما أن هذه الصيغة الاستدلالية الأخيرة - الصحيحة - تكافئ الصيغة الأولى بناء على ما اتخذناه من خطوات سابقة، فإنه يلزم عن هذا أن تكون الصيغة الأولى الأصلية، معبرة عن استدلال صحيح، أي تكون المقدمتان فيها مستلزمتين للنتيجة بالضرورة.

هذا، ويمكن أيضاً إثبات صحة الاستدلال عن طريق قوائم الصدق الذي سيأتي شرح مفصّل لها في موضع لاحق.

ويمكن إثبات صحة هذا الاستدلال بطريقة أخرى:

الاستدلال الذي يراد إثبات صحته هو:

(ن ⊃ م) . (و ⊃ ~ م) : ⊃ : (و ⊃ ~ ن)

ومن أجل إثبات صحة هذا الاستدلال علينا أن نذكر أن:

قضية اللزوم تكافئ قضية اللزوم العكسي، أي أن:

ق ⊃ ل . ≡ . ~ ل ⊃ ~ ق

ومن ثمّ إذا وضعنا قضية اللزوم العكسي بدلاً من المقدمة الثانية، حيث إن:

(و ⊃ ~ م) . ≡ . م ⊃ ~ و

ووضعنا قضية اللزوم العكسي بدلاً من النتيجة، حيث إن:

(و ⊂ ~ ن) . ≡ . ن ⊂ ~ و

فإننا سوف نحصل على:

(ن ⊂ م) . (م ⊂ ~ و) : ⊂ : (ن ⊂ ~ و)

فإذا ما وضعنا:

ق	بدلاً من	ن
، ل	بدلاً من	م
، م	بدلا من	~ و

فإننا نحصل على:

(ق ⊂ ل) . (ل ⊂ م) : ⊂ : (ق ⊂ م)

وهى صورة لمتسلسلة لزومية صحيحة، تستوفي شروط المتسلسلة اللزومية، وبما أن هذه الصيغة الاستدلالية الأخيرة - الصحيحة - تكافئ الصيغة الأولى بناء على ما اتخذناه من خطوات، فإنه تلزم عن ذلك أن تكون الصيغة الأصلية، معبرة عن استدلال صحيح، وهو المطلوب إثباته.

والجدير بالذكر أن متسلسلة اللزوم قد تحتوى أحياناً على قضية انفصالية. ولكي نوضح ذلك علينا أن نتذكر أولاً:

أ- أن الفصل يكافئ لزوماً حجته الأولى منفية وحجته الثانية مثبتة، أي أن:

ق ۷ ل . ≡ . ~ ق ⊂ ل

ب- وأن اللزوم يكافئ فصلاً حجته الأولى منفية وحجته الثانية مثبتة، أي أن:

ق ⊂ ل . ≡ . ~ ق ۷ ل

ولنفرض الآن أن لدينا الصيغة التالية:

(~ م ∨ ~ ن) . (ن ∨ و) : ⊃ : (~ م ∨ و)

وأردنا أن نتبين ما إذا كانت تعبر عن استدلال صحيح أم لا، فإننا نلجأ مثلاً إلى ما يأتي:

١- نضع بدلا من قضايا الفصل في هذه الصيغة، قضايا اللزوم المكافئة لها، كما يلي:

بما أن (~ م ∨ ~ ن) . ≡ . (م ⊃ ~ ن)

وبما أن (ن ∨ و) . ≡ . (~ ن ⊃ و)

، وبما أن (~ م ∨ و) . ≡ . (م ⊃ و)

إذن فنحن نحصل على الصيغة التالية:

(م ⊃ ~ ن) . (~ ن ⊃ و) : ⊃ : (م ⊃ و)

فإذا ما وضعنا:

ق بدلاً من م

، ل بدلا من ~ ن

، م بدلا من و

فإننا نحصل على:

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ق ⊃ م)

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة متسلسلة لزومية تحتوي على قضايا فصلية (أي انفصالية) باستخدام قضايا لزوم مكافئة لها.

ويمكن أيضاً إثبات صحة هذه المتسلسلة اللزومية بواسطة قوائم الصدق، كما سنوضح ذلك في موضع لاحق.

وقد تحتوي متسلسلة اللزوم على قضايا معبرة عن التنافر:

فإذا كانت لدينا الصيغة التالية:

[~ (ل. م) . (م v ن)] ⊂ (ل ⊂ ن).

وأردنا أن نعرف ما إذا كانت معبرة عن استدلال لزومي صحيح أم لا، فإننا نتبع الخطوات التالية:

١- نضع بدلاً من صيغة التنافر ~ (ل . م) قضية لزومية مكافئة لها، وهي (ل ⊂ ~م).

٢- نضع بدلاً من القضية الفصلية (م v ن) قضية لزومية مكافئة لها، وهي (~ م ⊂ ن).

ومن ثمَّ فإننا نحصل على الصيغة اللزومية التالية:

[(ل ⊂ ~ م) . (~ م ⊂ ن)] ⊂ (ل ⊂ ن).

٣- فإذا ما وضعنا متغيرات القضايا: ق، ل، م بدلاً من «ل»، «~ م»، «ن» على الترتيب لحصلنا على المتسلسلة اللزومية الصحيحة التالية:

[(ق ⊂ ل) . (ل ⊂ م)] ⊂ (ق ⊂ م).

وهكذا نكون قد استدللنا على صحة متسلسلة لزومية تحتوي على قضية تنافر، وقضية انفصال، باستخدام قضايا لزومية مكافئة لها.

ويمكن أيضاً إثبات صحة هذه المتسلسلة اللزومية بواسطة قوائم الصدق، كما سنوضح ذلك في موضع لاحق.

خامساً: رابطة التكافؤ

سنعرض الآن لرابطة أخرى تتعلق بالحساب التحليلي للقضايا، ونعنى بها رابطة التكافؤ equivalence، وينتج عن هذه الرابطة قضية مركبة تسمى قضية التكافؤ، ويرمز لإجراء التكافؤ بالرمز الآتي:

≡

فإذا كانت لدينا قضيتان «ق»، «ل» وأردنا أن نعبر عن التكافؤ بينهما، فإننا نعبر عن ذلك بالصيغة الرمزية الآتية:

ق ≡ ل

وتسمى القضية «ق «باسم «القضية التي على يمين التكافؤ»، وتسمى القضية «ل» باسم «القضية التي على يسار التكافؤ». ونحن إنما نهدف من إثبات التكافؤ بين قضيتين إلى استبعاد إمكان صدق إحداهما مع كذب الأخرى. ومن ثمَّ فإن قضية التكافؤ تكون صادقة إذا ما كان شطراها - الأيمن والأيسر - إما صادقتين أو كاذبتين معاً، و إلا كانت قضية التكافؤ كاذبة[1].

والتكافؤ قد يكون بين القضية الواحدة ونفسها، فيكون معبراً في هذه الحالة عن الهوية. فعندما نقول:

ق ≡ ق

فهذا تكافؤ بين القضية ونفسها، ونعني بهذه الصيغة أن أية قضية تكون هي هي نفسها.

كما أن التكافؤ قد يكون بين قضيتين أو أكثر مثل:

ق ≡ ل ≡ م

فيعبر في هذه الحالة عن تساوي قيمة الصدق في القضايا المتكافئة.

كما أنه من المهم أن نشير إلى أن التكافؤ بين قضيتين إنما يعني أيضاً اللزوم المتبادل بين القضيتين المتكافئتين، فلو كانت لدينا الصيغة التالية:

ق ≡ ل

لكان معنى ذلك أن كلاً من القضيتين «ق» و «ل» تلزم عن الأخرى وتستلزمها

(١) تارسكي (ألفرد)، مقدمة للمنطق - ولمنهج البحث في العلوم الاستدلالية، ص٦٨.

كذلك[1]، أي أن تكون (ق ⊃ ل)، كما تكون (ل ⊃ ق). ويمكن التعبير عن ذلك على النحو الآتي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)]

وتُقْرَأ هكذا:

إن القول بأن «ق» تكافئ «ل» يكافئ القول بأن صدق «ق» يستلزم صدق «ل»، وصدق «ل» يستلزم صدق «ق».

هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى فإن التكافؤ بين قضيتين إنما يعني أيضاً أن القضيتين المتكافئتين إما أن يصدقا معًا أو يكذبا معاً، فلو كانت لدينا الصيغة التالية:

ق ≡ ل

لكان معنى ذلك أنه إما أن تصدق «ق» و «ل» معاً، أو تكذبان معاً.

ويمكن التعبير عن ذلك على النحو الآتي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق . ل) ٧ (~ ق . ~ ل)]

وتقرأ هكذا:

إن القول بأن «ق» تكافئ «ل» يكافئ القول بأنه إما أن «ق» و «ل» صادقتان معاً، أو أن «ق» و «ل» كاذبتان معاً.

وإذا ما أردنا أن نحصر أهم صور التكافؤات التي ذكرناها في صفحات سابقة، فإنه يمكننا حصرها على النحو الآتي:

١ -	(ق ٧ ل)	≡	~	(~ ق. ~ ل)
٢ -	(ق . ل)	≡	~	(~ ق ٧ ~ ل)
٣ -	(ق ⊃ ل)	≡	~	(ق . ~ ل)

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ١٥٠.

٤ - (ق ⊃ ل) ≡ (~ ق v ل)

٥ - (ق v ل) ≡ (~ ق ⊃ ل)

٦ - (ق . ل) ≡ ~ (ق ⊃ ~ ل)

٧ - ~ (ق . ل) ≡ (~ ق v ~ ل)

٨ - ~ (ق v ل) ≡ (~ ق . ~ ل)

٩ - (ق . ل) ≡ (ل . ق)

١٠- (ق v ل) ≡ (ل v ق)

١١- (ق ⊃ ل) ≡ (~ ل ⊃ ~ ق)

١٢- ~ (ق . ل) ≡ (ق ⊃ ~ ل)

١٣- (ق ≡ ل) ≡ [(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)]

١٤- (ق ≡ ل) ≡ [(ق. ل) V (~ ق . ~ ل)]

التكافؤ بين صور الاستدلالات الصحيحة:

سبق أن ذكرنا أننا في المنطق الرمزي المعاصر لا نستدل فقط على صدق قضية ما، بناء على صدق قضية أخرى مكافئة لها، بل نستدل كذلك على صحة استدلال ما، بناء على صحة استدلال آخر صحيح مكافئ له في الصورة والصياغة. ويتم ذلك عن طريق استبدال بعض القضايا بغيرها من القضايا الأخرى التي تكافئها. ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتي:

«هذا الرجل إما جائع أو متعب، ولكنه ليس جائعاً. إذن فهو متعب».

برهن على صحة هذا الاستدلال.

أولاً: لابد لنا لكي نبرهن على صحة هذا الاستدلال، من أن نقوم بصياغته صياغة رمزية.

نرمز للقضية القائلة «هذا الرجع جائع» بالرمز «ق»

ونرمز للقضية القائلة «هذا الرجل متعب» بالرمز «ل»

ومن ثمّ نحصل على الصيغة الاستدلالية التالية:

[(ق v ل) . ~ ق] ⊂ ل

ثانياً: الآن نضع بدلاً من (ق v ل) قضية لزومية مكافئة لها وهى:

(~ ق ⊂ ل)

حيث أن القضية الانفصالية تكافئ لزوم حجته الأولى منفية وحجته الثانية مثبتة.

ومن ثمّ تصبح الصيغة الاستدلالية على النحو الآتي:

[(~ ق ⊂ ل) . ~ ق] ⊂ ل

وهى صيغة استدلالية صحيحة. ويمكن توضيح ذلك لو وضعنا «ق «بدلاً من «~ ق «فنحصل على:

[(ق ⊂ ل) . ق] ⊂ ل

وهى قاعدة الإثبات بالإثبات (أو الوضع بالوضع) التي تعبر عن استدلال لزومي صحيح، كما سبق أن ذكرنا من قبل.

هذا ويمكننا إثبات صحة الاستدلال المطلوب عن طريق قوائم الصدق التي سوف نقوم بشرحها في موضع لاحق.

تحصيلات الحاصل الخاصة بحساب القضايا:

قانون الهوية:

ق ≡ ق

(ق ٧ ق) ≡ ق

(ق . ق) ≡ ق

قانون النفي المزدوج:

~ ~ ق ≡ ق

قانون الوسط المرفوع:

ق ٧~ ق

قانون التناقض:

~ (ق . ~ ق)

برهان الخلف:

ق ⊂ ~ ق . ≡ . ~ ق

حاصل الجمع المنطقي:

قانون التبادل:

ق ٧ ل . ≡ . ل ٧ ق

قانون الترابط:

ق ٧ (ل ٧ م) . ≡ . (ق ٧ ل) ٧ م . ≡ . (ق ٧ ل ٧ م)

حاصل الضرب المنطقي

قانون التبادل:

(ق . ل) ≡ (ل . ق)

قانون الترابط:

[ق . (ل . م)] ≡ [(ق . ل) . م] ≡ (ق . ل . م)

حاصل الجمع والضرب:

القانون الأول للاستغراق:

[ق . (ل ∨ م)] ≡ [(ق . ل) ∨ (ق . م)]

القانون الثاني للاستغراق:

[ق ∨ (ل . م)] ≡ [(ق ∨ ل) . (ق ∨ م)]

الاستغراق المزدوج:

[(ق ∨ ل) . (م ∨ ن] ≡ {[(ق . م) ∨ (ق . م)] ∨ [(ق . ن) ∨ (ق . ن)]}

[(ق . ل) ∨ (م . ن)] ≡ {[(ق ∨ م) . (ق ∨ م)] . [(ق ∨ ن) . (ق ∨ ن)]}

الحد الزائد عن الحاجة:

[ق . (ق ∨ ل)] ≡ [ق ∨ (ق . ل)] ≡ ق

النفي وحاصل الضرب والجمع:

قانونا دي مورجان:

~ (ق ∨ ل) . ≡ . ~ ق . ~ ل

~ (ق . ل) . ≡ . ~ ق ∨ ~ ل

حذف عامل دائم الصدق:

[ق . (ل ٧ ~ ل)] ≡ . ق

حذف عامل دائم الكذب:

[ق ٧ (ل. ~ ل] ≡. ق

النفي الزائد عن الحاجة:

[ق ٧ (~ ق . ل)] ≡ . ق ٧ ل

اللزوم والنفي وحاصل الضرب والجمع:

فض اللزوم:

ق ⊂ ل . ≡ . ~ ق ٧ ل

ق ⊂ ل . ≡ . ~ (ق . ~ ل)

عكس النقيض:

ق ⊂ ل . ≡ . ~ ل ⊂ ~ ق

تماثل المقدمات:

ق ⊂ (ل ⊂ م) . ≡ . ل ⊂ (ق ⊂ م) . ≡ . (ق . ل) ⊂ م

إدماج اللزوم:

(ق ⊂ ل) . (ق ⊂ م) . ≡ . ق ⊂ (ل . م)

(ق ⊂ م) . (ل ⊂ م) . ≡ . ق ٧ (ل ⊂ م)

(ق ⊂ ل) ٧ (ق ⊂ م) . ≡ . ق ⊂ (ل ٧ م)

(ق ⊂ م) ٧ (ل ⊂ م) . ≡ . (ق. ل) ⊂ م

التكافؤ واللزوم والنفي وحاصل الضرب والجمع:

فض التكافؤ:

(ق ≡ ل) . ≡ . (ق ⊂ ل) . (ل ⊂ ق)

(ق ≡ ل) .≡ . [(ق . ل) ٧ (~ ق . ~ ل)]

نفي التكافؤ:

~ (ق ≡ ل) . ≡ . (ق ≡ ~ ل)

نقي القضايا المتكافئة:

(ق ≡ ل) . ≡ . (~ ق ≡ ~ ل)

جانب واحد لقضايا اللزوم:

إضافة قضية اختيارية:

ق . ⊂ . ق ٧ ل

لزوم قضية من قضيتين:

(ق. ل) ⊂ ق

إضافة اختيارية للزوم:

ق ⊂ (ل ⊂ ق)

~ ق ⊂ (ق ⊂ ل)

اللزوم الاستدلالي:

[ق . (ق ⊂ ل)] ⊂ ل

إضافة قضية إلى اللزوم:

(ق ⊂ ل) . ⊂ : (ق ⊂ ل) ٧ م

إضافة عامل إلى القضايا اللزومية:

(ق ⊂ ل) . ⊂ : (ق . م) ⊂ ل

حذف قضية من قضايا اللزوم:

[(ق ٧ م) ⊂ ل] ⊂ (ق ⊂ ل)

إضافة عامل من القضايا اللزومية:

[ق ⊂ (ق . م)] ⊂ (ق ⊂ ل)

قانونا الاشتقاق:

(ق ⊂ ل) . (م ⊂ ن) : ⊂ : (ق . م) ⊂ (ل . ن)

(ق ⊂ ل) . (م ⊂ ن) : ⊂ : (ق ٧ م) ⊂ (ل ٧ ن)

لزوم متعدي:

(ق ⊂ ل) . (ل ⊂ م) : ⊂ . (ق ⊂ م)

تكافؤ متعدي:

(ق ≡ ل) . (ل ≡ م) : ⊂ . (ق ⊂ م)

قوائم الصدق

إن قائمة الصدق truth table هي طريقة فنية تُسْتَخدم في المنطق الرمزي للتعبير عن قيم صدق القضايا المركبة بواسطة وضع جدول لكل قيم الصدق الممكنة الخاصة بالعناصر المكونة للقضايا المركبة (العطف، واللزوم، والفصل، والتكافؤ)[١]. كما أنه يمكن عن طريق قائمة الصدق إثبات صحة أو بطلان الاستدلالات المنطقية، فضلاً عن أنه يمكننا أيضاً - بواسطة قوائم الصدق - التمييز بين قضايا تحصيل الحاصل والقضايا التركيبية والقضايا المتناقضة. وكان أول من استخدم قوائم الصدق العالِم الرياضي الأمريكي «بوست» E. L Post والفيلسوف النمساوي «فتجنشتين» L. Wittgenstein (١٨٨٩ - ١٩٥١)[٢].

ولبناء قائمة الصدق لابد أولاً من القول بأن أية قضية ذات معنى هي إما أن تكون صادقة أو كاذبة. فإذا حكمنا على قضية ما بالصدق، فلابد أن نحكم على نفي هذه القضية بالكذب، وإذا حكمنا على قضية ما بالكذب فإننا نحكم على نفيها بالصدق. ومن ثمَّ من أجل الحكم على صدق أو كذب قضية مركبة، لابد من معرفة قيم صدق عناصر هذه القضية أي معرفة صدق أو كذب القضايا البسيطة المكّونة للقضية المركبة[٣].

ولنأخذ على سبيل المثال الحرف «ق» كرمز لقضية ما، ولنأخذ الحرف «ص» لنرمز به إلى «الصدق»، والحرف «ك» لنرمز به إلى «الكذب». ومن ثمّ يمكننا أن نتبين أن أية قضية لها قيمتي صدق، وذلك على النحو الآتي:

---

(1) Searles, Herbert L., Logic and Scientific Methods, pp. 137 - 138.

(2) Lee, Harold Newton, Symbolic Logic - An Introductory Textbook for Non-Mathematicians, p. 224.

(3) Searles, Herbert L., Logic and Scientific Methods, pp. 138 - 139.

قائمة رقم (١)

ق	
ص ك	

أما إذا أردنا نفي «ق»، فإننا نحصل على:

~ ق

وتُقْرَأ هكذا:

«ق كاذبة»

أو «من الكذب القول بصدق ق»

وعلى ذلك فإن القضية القائلة:

«اليوم هو السبت»

يمكن نفيها على النحو الآتي:

(إن القضية القائلة «اليوم هو السبت «قضية كاذبة)، ويمكن توضيح ذلك من خلال قائمة الصدق البسيطة الآتية:

قائمة رقم (٢)

ق	~ ق
ص ك	ك ص

وهذه القائمة توضح أنه إذا كانت «ق «صادقة، كانت «~ ق» كاذبة.

وإذا كانت «ق» كاذبة، كانت «~ ق» صادقة.

والواقع أنه لتكوين قائمة الصدق ينبغي على المرء أن يتأكد من أنه قد قام بحصر شامل لكل الاحتمالات الممكنة لمجموعة قيم الصدق الخاصة بالقضايا المفردة، ثم يضعها على اليمين. وكل مجموعة من هذه المجموعات توضع في صف أفقي واحد. وكقاعدة عامة نقول: إن أي صيغة منطقية تحتوي على عدد «ن» من القضايا المفردة، فإن قيم الصدق الممكنة تساوي ٢، بحيث ترمز «٢» لعدد قيم الصدق الخاصة بأية قضية، وتشير «ن» إلى عدد المتغيرات[1]. ومن المعروف أن قيم الصدق الخاصة بأية قضية هى قيمتان: الصدق والكذب، لأن أية قضية إما أن تكون صادقة أو كاذبة. فإذا نظرنا إلى المثال السابق المتعلق بالقضية القائلة «اليوم هو السبت»، فمن الواضح أنها تعبر عن متغير واحد هو «ق». ومن ثمّ فهى تتألف من مجموعتين (صفين) من قيم الصدق، كما هو واضح بالقائمة رقم «٢».

أما إذا كان لدينا دالة الصدق العطفية الآتية:

ق . ل

فإننا نلاحظ أنها تتألف من متغيرين «ق» و «ل». ولذا سوف نحتاج إلى وجود أربع مجموعات (صفوف) من قيم الصدق، لأن:

٢^٢ = ٢ × ٢ = ٤

وذلك على النحو الآتي:

قائمة رقم (٣)

	ق	ل	
الصف الأول	ص	ص	
الصف الثاني	ص	ك	
الصف الثالث	ك	ص	
الصف الرابع	ك	ك	

(1) Pollock, John L., An Introduction to Symbolic Logic, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969 , p. 24.

أما إذا كانت دالة الصدق تحتوي على ثلاثة متغيرات، مثل:

[(ق ⊂ ل) . (ل ⊂ م)] ⊂ (ق ⊂ م)

فهنا يكون لدينا - كما ذكرنا - ثلاثة متغيرات، هي: «ق» و «ل» و «م».

وفي هذه الحالة سنحتاج إلى ثمان مجموعات (صفوف) من قيم الصدق[1]، لأن:

$٢^{٣}$ = ٢ × ٢ × ٢ = ٨.

وذلك على النحو الآتي:

قائمة رقم (٤)

ق	ل	م	
ص	ص	ص	
ص	ص	ك	
ص	ك	ص	
ص	ك	ك	
ك	ص	ص	
ك	ص	ك	
ك	ك	ص	
ك	ك	ك	

أما إذا كانت دالة الصدق تحتوى على أربعة متغيرات، مثل:

[(ق ⊂ ل) . (م ⊂ ن) . (ق v م)] ⊂ (ل v ن)

نلاحظ هنا وجود أربعة متغيرات: «ق» و «ل» و «م» و «ن». ومن ثمَّ سوف نحتاج في هذه الحالة إلى ست عشر مجموعة من قيم الصدق، لأن:

$٢^{٤}$ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦

(1) James D. Carney / Richard K. Scheer, Fundamentals of Logic, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1980 , p. 195.

وذلك على النحو الآتي:

القائمة رقم (٥)

ق	ل	م	ن	
ص	ص	ص	ص	
ص	ص	ص	ك	
ص	ص	ك	ص	
ص	ص	ك	ك	
ص	ك	ص	ص	
ص	ك	ص	ك	
ص	ك	ك	ص	
ص	ك	ك	ك	
ك	ص	ص	ص	
ك	ص	ص	ك	
ك	ص	ك	ص	
ك	ص	ك	ك	
ك	ك	ص	ص	
ك	ك	ص	ك	
ك	ك	ك	ص	
ك	ك	ك	ك	

ومن الواضح أنه إذا كانت دالة الصدق تحتوى على ثلاث مجموعات أو أكثر من القضايا المفردة، فإنه قد يحدث بسهولة إغفال ذكر واحدة منها أو أكثر. ومن أجل تجنب الوقوع في ذلك ينبغي إتباع نظام ثابت في وضع احتمالات الصدق داخل القائمة، وذلك على النحو الآتي:

نبدأ بالقضية المفردة التي لدينا في أقصى اليسار - وهى القضية «ن» في القائمة رقم (٥) - ثم نضع قيم الصدق بالتبادل على النحو الآتي: ص، ك، ص، ك، ص، ك، ص، ك .... وهكذا حتى نصل إلى العدد $٢^{ن}$ من قيم الصدق. ثم ننتقل إلى القضية المفردة التي تليها - وهى القضية «م» في القائمة رقم (٥) - ونضع تحتها قيمتى الصدق في وقت واحد بالتبادل على النحو الآتي:

ص، ص، ك، ك، ص، ص، ك، ك، ص، ص .... وهكذا. ثم ننتقل إلى القضية التي تليها - وهى القضية «ل» في القائمة رقم (٥) - ونضع تحتها أربع قيم صدق في وقت واحد بالتبادل، وذلك على النحو الآتي: ص، ص، ص، ص، ك، ك، ك، ك، ص، ص، ص، ص .... وهكذا. وإذا انتقلنا إلى القضية التي تليها - وهى القضية «ق» في القائمة رقم (٥) - نضع ثمان قيم صدق في وقت واحد بالتبادل، على النحو الآتي: ص، ص، ص، ص، ص، ص، ص، ص، ك، ك، ك، ك، ك، ك، ك، ك. وعلى هذا النحو سوف نحصل على كل مجموعات (صفوف) قيم الصدق الممكنة[1].

وإذا كنا قد أوضحنا الدالة الخاصة بالنفي في القائمة رقم (٢)، فإننا سوف نتناول الآن الدالة العطفية.

الدالة العطفية

فإذا كانت لدينا دالة العطف الآتية:

ق . ل

فإنها تعنى أن: «ق» و «ل» صادقتان معاً.

ومن أجل تكوين قائمة صدق نضع «ق» و «ل» على يمين الخط المزدوج. ونضع الدالة العطفية «ق . ل» على يساره، وذلك على النحو الآتي:

القائمة رقم (٦)

	ق ل	ق . ل
الصف الأول	ص ص	ص
الصف الثاني	ص ك	ك
الصف الثالث	ك ص	ك
الصف الرابع	ك ك	ك

عمود رقم (١) عمود قم (٢) عمود رقم (٣)

(1) Pollock, Hohn., An Introduction to Scientific Logic, p. 24.

ولقد عرفنا أن العطف يصدق في حالة واحدة فقط، وهى عندما تكون «ق» و «ل» صادقتين معاً. وهى الحالة الأولى التي يوضحها الصف الأول، وتكذب الدالة العطفية في حالة كذب أحد طرفي العطف أو في حالة كذبهما معاً. وهذه القيم الخاصة بالدالة العطفية يوضحها العمود رقم (٣)، ولذا نحن نضع قيم الصدق تحت «النقطة»، وليس تحت «ق» أو «ل»، لأن قيم الصدق التي يحددها العمود رقم (٣) هى قيم الدالة العطفية وليست قيم لـ «ق» أو قيم لـ «ل». ومن الملاحظ أننا نسمى مجموعات قيم الصدق الأفقية «صفوفاً» rows، أما مجموعات قيم الصدق الرأسية فنسميها «أعمدة» columns.

كما يلاحظ أن إدخال متغيرات القضايا المنفية على قائمة الصدق، أو بعبارة أخرى، اتخاذ إجراء النفي إزاء دالة الصدق أو جزء منها، يتطلب منا إدخال تعديلات إضافية على طريقة تكون القائمة. ولنأخذ مثلا لذلك، كيفية تكوين قائمة صدق الدالة العطفية التالية:

(~ ق . ~ ل)

قائمة رقم (٧)

ق	ل	~ ق	~ ل	(~ ق . ~ ل)
ص	ص	ك	ك	ك
ص	ك	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)

وهكذا فنحن قد أضفنا عمودين جديدين أحدهما خاص بالدالة (~ ق) والآخر خاص بالدالة (~ ل) لكي نكتب قيم صدق كل واحد من المتغيرين في الدالة[١].

(١) د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، ص ٢٠٣.

الدالة الانفصالية

إذا كانت لدينا الدالة الانفصالية الآتية:

(ق ٧ ل)

فأنها تكون صادقة في حالة صدق أحد البديلين («ق» أو «ل») أو في حالة صدقهما معاً، ولا تكذب إلا في حالة واحدة فقط وهى كذب «ق» و «ل» معاً. وقائمة الصدق الآتية توضح ذلك:

قائمة (٨)

ق	ل	ق ٧ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك
(١)	(٢)	(٣)

من الواضح أن هذا انفصال ضعيف، وهو يكذب في حالة واحدة فقط، وهى كذب البديلين معاً، ويصدق في بقية الحالات الأخرى.

ويرى ريشنباخ أن قوائم الصدق يمكن قراءتها من الجهتين: ابتداء من القضايا البسيطة وانتهاء بدوال الصدق، أو العكس: ابتداء من دوال الصدق وانتهاء بالقضايا البسيطة. فبالنسبة للدالة الانفصالية مثلاً، إذا بدأنا من الاتجاه الأول (الذي على اليمين)، سنجد أن قوائم الصدق تقول: «إذا كانت القضية «ق» صادقة، والقضية «ل» صادقة، فإن الدالة الانفصالية (ق ٧ ل) تكون صادقة». أما إذا بدأنا من الاتجاه الثاني، فسنجد أن قوائم الصدق تقول: «إذا كانت الدالة الانفصالية (ق ٧ ل) صادقة، فإن «ق «تكون صادقة، و«ل» تكون صادقة، أو أن «ق» تكون صادقة و«ل» تكون كاذبة، أو أن «ق» تكون كاذبة

و«ل» تكون صادقة»[١]. وهذا الفصل الذي يسمح بالجمع بين صدق «ق» وصدق «ل» معاً، يسمى «الفصل الضعيف».

ويوجد نوع آخر من الفصل هو «الفصل القوي». وعلاقة الفصل القوي بين قضيتين تعبر عن قانون الثالث المرفوع، إما «ق» أو «ل» ولا ثالث لهما[٢]. وعلى ذلك فالفصل القوي لا يصدق إلا في حالة صدق أحد البديلين وكذب الآخر.

وتوضح القائمة الآتية قيم صدق الفصل القوي:

قائمة (٩)

ق	ل	ق ٧ ل
ص	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك
(١)	(٢)	(٣)

وسوف نقتصر على استخدام الفصل بمعناه الضعيف فحسب.

الدالة اللزومية

إذا كانت لدينا الدالة اللزومية الآتية:

ق ⊃ ل

فإنها تكون صادقة في حالة صدق المقدم «ق» وصدق التالي «ل» معاً. أو في حالة كذب

(1) Reichenbach, H., Philosophic Foundations of Quantum Mechanics, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1944, p. 148.

(٢) د. نازلي إسماعيل حسين، مبادئ المنطق الرمزي، ص ٢١٤.

المقدم والتالي معاً، كما تصدق في حالة كذب المقدم وصدق التالي. أما الحالة الوحيدة التي تكذب فيها فهى حالة صدق المقدم وكذب التالي. ويمكن توضيح ذلك من خلال قائمة الصدق الآتية:

قائمة (١٠)

ق	ل	ق ⊂ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص
(١)	(٢)	(٣)

وهذه القائمة توضح أن الدالة اللزومية تكذب في حالة واحدة فقط، وهى حالة صدق المقدم وكذب التالي، وتصدق في بقية الحالات الأخرى.

دالة التكافؤ

إن القضيتين المتكافئتين لهما قيم صدق واحدة، فلو كانت إحداهما صادقة كانت الأخرى أيضاً صادقة، ولو كانت إحداهما كاذبة كانت الأخرى أيضاً كاذبة، وفي هذه الحالة تكون دالة التكافؤ صادقة. أما إذا كانت إحدى القضيتين صادقة والأخرى كاذبة، أو العكس، ففي هذه الحالة تكون دالة التكافؤ كاذبة. ويمكن توضيح ذلك على قائمة الصدق الآتية:

قائمة (١١)

ق	ل	ق ≡ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ص
(١)	(٢)	(٣)

واضح من هذه القائمة أن التكافؤ يصدق في حالتين ويكذب في حالتين: يصدق في حالة صدق أو كذب القضيتين المتكافئتين معاً، ويكذب في حالتي صدق إحداهما وكذب الأخرى.

أي أن التكافؤ يعني أن «ق «و «ل «إما أن تصدقا معاً أو تكذبا معاً، ويمكن صياغة ذلك على النحو الآتي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق. ل) ∨ (~ ق . ~ ل)]

وتُقْرَأ هكذا:

إن القول بأن «ق» تكافئ «ل» يكافئ القول بأنه إما أن تصدق «ق» و «ل» معاً أو تكذبا معاً.

ويمكن إثبات صحة ذلك على قائمة الصدق على النحو الآتي:

قائمة (١٢)

ل	ق	~ق	~ل	(ق ≡ ل)	≡	[(ق . ل)	∨	(~ ق . ~ل)]
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	✓	(٦)	(٨)	(٧)

بمقارنة العمود رقم (٥) بالعمود رقم (٨) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا يعني أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى فإن التكافؤ يعني اللزوم المتبادل.

فعندما نقول إن «ق» تكافئ «ل»، فهذا معناه أن صدق «ق» يستلزم صدق «ل»، وصدق «ل» يستلزم صدق «ق». ويمكن صباغة ذلك على النحو الآتي:

(ق ≡ ل) ≡ [ق ⊂ ل) . (ل ⊂ ق)]

وتُقْرَأ هكذا:

إن القول بأن «ق» تكافئ «ل» يكافئ القول بأن صدق «ق» يستلزم صدق «ل»، وصدق «ل» يستلزم صدق «ق».

ويمكن إثبات صحة ذلك عن طريق قائمة الصدق على النحو الآتي:

قائمة (١٣)

ق	ل	(ق ≡ ل)	≡	[(ق ⊃ ل)	·	(ل ⊃ ق)]
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	✓	(٤)	(٦)	(٥)

بمقارنة العمود رقم (٣) بالعمود رقم (٦) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا يعني أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

ويمكننا الآن تلخيص قوائم الصدق الخاصة بالدالات الأساسية سالفة الذكر، كما عرضها «ريشنباخ» في كتابه «مبادئ المنطق الرمزي»[1]:

(1) Reichenbach, H., Elements of Symbolic Logic, p. 27.

قائمة (١٤)

(أ)

ق	~ ق
ص	ك
ك	ص

(ب)

ق	ل	ق ∨ ل	ق . ل	ق ⊃ ل	ق ≡ ل
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ص	ك
ك	ك	ك	ك	ص	ص

إذا نظرنا إلى قيم الصدق الخاصة بالدوال السابقة - التي تعرضها القائمة رقم (١٤) - سنجد أن هذه القيم تكون صادقة أحياناً وكاذبة أحياناً. ولذا فهى تسمى «تركيبية» synthetic، والواقع أن كافة القضايا الفيزيائية - سواء أكانت قوانين فيزيائية أم قضايا تتعلق بالشروط الفيزيائية في عصر معين - هى قضايا تركيبية[1].

أما إذا تناولنا نوعاً آخر من القضايا مثل:

ق ≡ ~ ق

وأردنا أن نعرف قيم صدقها، فإنه يمكننا معرفة ذلك من قائمة الصدق الآتية:

قائمة (١٥)

ق	~ ق	ق ≡ ~ ق
ص	ك	ك
ك	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)

(1) Reichenbach, H., Philosophic Foundations of Quantum Mechanics, p. 149.

من العمود رقم (٣) يتضح أن قيم الصدق كلها كاذبة، والدالة التي تكذب جميع قيم صدقها تسمى متناقضة Contradiction، وهى تكون كاذبة على الدوام[١].

أما إذا كانت صيغة منطقية معينة صادقة بالنسبة لجميع قيم الصدق، فإن مثل هذه الصيغة تسمى تحصيل حاصل tautology. فإذا كانت لدينا الدالة الآتية:

ق ≡ ~ ~ ق

وأردنا أن نعرف قيم صدقها، فإنه يمكننا معرفة ذلك من قائمة الصدق الآتية:

قائمة (١٦)

ق	~ ق	~ ~ ق	ق ≡ ~ ~ ق
ص	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)

من العمود رقم (٤) يتضح أن قيم الصدق كلها صادقة، ومن ثمّ فهى دالة تحصيل حاصل.

ويقول ريشنباخ أن صيغ تحصيل الحاصل تتسم بأنها ضرورية وفارغة empty، أي لا تنبئنا بشيء، ويؤكد أن هذه السمة لا تعني أن صيغ تحصيل الحاصل عديمة القيمة، بل على العكس، فإن قيمتها متضمنة في كونها ضرورية وفارغة. ويذهب ريشنباخ إلى أنه يمكن على الدوام إضافة تحصيل الحاصل إلى القضايا الفيزيائية، شريطة ألا تضيف هذه الصياغات مضموناً إلى القضايا الفيزيائية. وعلينا أن نستعين بصياغات تحصيل الحاصل إذا أردنا التوصل إلى بعض النتائج من القضايا الفيزيائية. وعلى ذلك فإن إقامة تحصيلات حاصل محكمة تكشف لعالِم الفيزياء عن أداة استنتاجية قوية. وينبغي النظر إلى الرياضيات بوصفها أداة من هذا النوع. ويؤكد ريشنباخ على أنه يمكننا - انطلاقاً مما لدينا من تحصيلات

(1) Ibid., p. 150.

الحاصل - إقامة قواعد تتيح لنا معالجة الصيغ المنطقية على نحو مماثل لما هو متبع في المناهج الرياضية[1].

وسوف نحاول في الصفحات التالية استخدام المنهج الاستنباطي في إثبات صحة أو بطلان بعض الاستدلالات المنطقية، مستخدمين في ذلك قوائم الصدق. ولكن قبل أن نشرع في ذلك، نود أن نثبت - عن طريق هذه القوائم - صحة بعض التكافؤات التي سبق أن ذكرناها في مواضع سابقة، وذلك على النحو الآتي:

١- (ق ٧ ل) ≡ ~ (~ ق . ~ ل)

يمكن بواسطة استخدام قوائم الصدق إثبات صحة هذا التكافؤ، ويجب أن نتذكر أن التكافؤ يصدق في حالتين، هما: صدق القضيتين معاً أو كذبهما معاً.

قائمة (١٧)

ق	ل	~ ق	~ ل	(ق ٧ ل)	≡	~	(~ ق . ~ ل)
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	✓	(٧)	(٦)

بمقارنة العمود رقم (٥) بالعمود رقم (٧) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا معناه أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

وهذا معناه أيضاً أن الفصل يكافئ عطفاً منفياً حجته الأولى منفية وحجته الثانية منفية.

(1) Ibid., pp. 149 - 150.

٢ - (ق . ل) ≡ ~ (~ق ∨ ~ ل)

قائمة (١٨)

ق	ل	~ ق	~ ل	(ق . ل)	≡	~	(~ ق ∨ ~ ل)
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص
ك	ل	ص	ص	ك	ص	ك	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	✓	(٧)	(٦)

بمقارنة العمود رقم (٥) بالعمود رقم (٧) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا معناه أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

وهذا معناه أن العطف يكافئ انفصالاً منفياً حجته الأولى منفية وحجته الثانية منفية.

٣ - (ق ∨ ل) ≡ (~ ق ⊃ ل)

قائمة (١٩)

ق	ل	~ ق	(ق ∨ ل)	≡	(~ ق ⊃ ل)
ص	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	✓	(٥)

بمقارنة العمود رقم (٤) بالعمود رقم (٥) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا معناه أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

وهذا يعني أن الفصل يكافئ لزوماً مثبتاً حجته الأولى منفية وحجته الثانية مثبتة.

٤- (ق ⊂ ل) ≡ (~ ق ∨ ل)

قائمة (٢٠)

ق	ل	~ ق	(ق ⊂ ل)	≡	(~ ق ∨ ل)
ص	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	✓	(٥)

بمقارنة العمود رقم (٤) بالعمود رقم (٥) يتضح أن قيم الصدق واحدة. وهذا معناه أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

وهذا يعني أن اللزوم يكافئ فصلاً مثبتاً حجته الأولى منفية وحجته الثانية مثبتة.

٥- (ق . ل) ≡ ~ (ق ⊂ ~ ل)

قائمة (٢١)

ق	ل	~ ل	(ق . ل)	≡	~	(ق ⊂ ~ ل)
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك
ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ك	ك	ص	ك	ص
ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	✓	(٦)	(٥)

بمقارنة العمود رقم (٤) بالعمود رقم (٦) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا معناه أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

وهذا يعني أن العطف يكافئ لزوماً منفياً حجته الأولى مثبتة وحجته الثانية منفية.

٦- (ق ⊃ ل) ≡ ~ (ق . ~ ل)

قائمة (٢٢)

ق	ل	~ ل	(ق ⊃ ل)	≡	~	(ق . ~ ل)
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك
ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	✓	(٦)	(٥)

بمقارنة العمود رقم (٤) بالعمود رقم (٦) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا معناه أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

وهذا يعني أن اللزوم يكافئ عطفاً منفياً حجته الأولى مثبتة وحجته الثانية منفية.

٧- ~ (ق ٧ ل) ≡ (~ ق . ~ ل)

قائمة (٢٣)

ق	ل	~ ق	~ ل	~	(ق ٧ ل)	≡	(~ ق . ~ ل)
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	✓	(٧)

بمقارنة العمود رقم (٦) بالعمود رقم (٧) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا معناه أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

وهذا يعني أن الفصل المنفي يكافئ عطفاً مثبتاً حجته الأولى منفية وحجته الثانية منفية.

٨- ~ (ق . ل) ≡ (~ ق ٧ ~ ل)

قائمة (٢٤)

ق	ل	~ ق	~ ل	~	(ق . ل)	≡	(~ ق ٧ ~ ل)
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	✓	(٧)

وبمقارنة العمود رقم (٦) بالعمود رقم (٧) يتضح أن قيم الصدق واحدة، وهذا معناه أن التكافؤ صحيح، وهو المطلوب إثباته.

وهذا يعني أن العطف المنفي يكافئ فصلاً مثبتاً حجته الأولى منفية وحجته الثانية منفية.

قوائم الصدق واستخدامها في التكافؤات

لو كانت لدينا دالة التكافؤ الآتية:

ق ≡ ل

ونريد أن نصل إلى ما يكافئها من دوال، علماً بأن ق ≡ ل تتحدد أصلاً على أساس العطف والانفصال والنفي، أي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق . ل) ٧ (~ ق . ~ ل)]

وبذلك تكون أول دالة مكافئة لدالتنا الأصلية (ق ≡ ل) هى الدالة:

(ق . ل) ٧ (~ ق . ~ ل)

وهى دالة انفصالية ذات حجتين مركبتين، الأولى هى (ق . ل)، والثانية هى (~ ق .~ل). ومن الواضح إننا نستطيع أن نصل إلى دوال الصدق المكافئة لهذا الدالة عن طريق استخدام قائمة المتكافئات التي سبق أن ذكرناها، وذلك بوضع دوال الصدق التي تكافئ الدالة التي لدينا وذلك على النحو الآتي:[1]

(ق ≡ ل) ≡ [(ق . ل) ٧ (~ ق . ~ ل)] (١)

≡ [~ (~ ق ٧ ~ ل) ٧ ~ (ق ٧ ل)] (٢)

≡ ~ [(~ ق ٧ ~ ل) . (ق ٧ ل)] (٣)

≡ ~ [(ق ⊂ ~ ل) . (~ ق ⊂ ل)] (٤)

يمكن استخدام قوائم الصدق لاثبات صحة هذه التكافؤات كما توضحه قائمة الصدق رقم (٢٥).

---

(١) د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، ص ٩٦.

قائمة رقم (٢٥)

ق	ل	~ ق	~ ل	(ق≡ل)≡[(ق . ل)٧(~ق . ~ل)] ≡ [~(~ق٧~ل)٧~(ق ٧ ل)] ≡ ~[(~ق٧~ل) . (ق٧ل)] ≡ ~[(ق⊂~ل).(~ق⊂ل)]																				
ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	✓	(٦)	(٨)	(٧)	✓	(١٠)	(٩)	(١٣)	(١٢)	(١١)	✓	(١٧)	(١٤)	(١٦)	(١٥)	✓	(٢١)	(١٨)	(٢٠)	(١٩)

بمقارنة الاعمدة (٥)، (٨)، (١٣)، (١٧)، (٢١) يتضح أن جميع قيم الصدق واحدة، مما يؤكد صحة التكافؤات جميعاً. وهذا هو المطلوب إثباته.

أما إذا كانت لدينا الدالة التالية: ~ (ق ≡ ل)

ونريد أن نصل إلى ما يكافؤها من دوال، علماً بأن ق ≡ ل تتحدد أصلاً على أساس العطف والانفصال والنفي، أي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق . ل) ٧ (~ ق . ~ ل)]

وهو أحد التعريفين اللذين قدمناهما للتكافؤ. فنجد أن أول دالة مكافئة لدالتنا المعطاة هى ما تأتي عن طريق التعريف السابق، أي:

~ (ق ≡ ل) ≡ ~ [(ق . ل) ٧ (~ ق . ~ ل)]

وبذلك تكون أول دالة مكافئة لدالتنا الأصلية ~ (ق ≡ ل) هى الدالة:

~ [(ق . ل) ٧ (~ ق . ~ ل)]

وهى دالة انفصالية منفية ذات حجتين مركبتين الأولى هى (ق . ل) والثانية هى (~ ق . ~ ل). ومن الواضح إننا نستطيع أن نصل إلى دوال الصدق التي تكافئ الدالة التي لدينا، وذلك على النحو الآتي:

~ (ق ≡ ل) ≡ ~ [(ق. ل) ٧ (~ ق. ~ ل)] (١)

≡ ~ (ق . ل) . ~ (~ ق . ~ ل) (٢)

≡ (~ ق ٧ ~ ل) . (ق ٧ ل) (٣)

≡ (ق ⊃ ~ ل) . (~ ق ⊃ ل) (٤)

فإذا شئنا الآن أن نتأكد من صحة هذه التكافؤات جميعاً عن طريق قائمة الصدق، فلابد أن يتضح في القائمة أن لهذه الدوال جميعاً - في حالة صدقها - قيم الصدق نفسها في ظل الشروط ذاتها. وهذا ما توضحه قائمة الصدق رقم (٢٦).

قائمة رقم (٢٦)

ق	ل	~ق	~ل	~ (ق ≡ ل) ≡ ~ [(ق . ل) ٧ (~ق . ~ل)] ≡ [~ (ق . ل) . ~ (~ق . ~ل)] ≡ [(~ق٧~ل) . (ق ٧ ل)] ≡ [(ق ⊂ ~ل) . (~ق ⊂ ل)]																				
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	✓	(١٠)	(٧)	(٩)	(٨)	✓	(١٢)	(١١)	(١٥)	(١٤)	(١٣)	✓	(١٦)	(١٨)	(١٧)	✓	(١٩)	(٢١)	(٢٠)

بمقارنة الأعمدة (٦)، (١٠)، (١٥)، (١٨)، (٢١) يتضح أن جميع قيم الصدق واحدة، مما يؤكد صحة التكافؤات جميعاً. وهذا هو المطلوب إثباته..

أما إذا كانت لدينا الدالة التالية:

~ (ق ≡ ~ ل)

ونريد أن نصل إلى الدوال المكافئة لها، فإننا نستطيع أن نحقق ذلك بنفس الطريقة السابقة (ولعلنا نلاحظ أن الفرق بين هذه الدالة والدالة السابقة التي وصلنا إلى ما يكافئها هو اختلاف في الحجة «ل»، فبينما كانت في الأولى مثبتة، فإنها هنا منفية، ولذلك فهى تكون في جميع الدوال المكافئة على عكس ما كانت عليه في الدالة الأولى من حيث الإثبات أو النفي)، وبذلك تكون لدينا سلسلة التكافؤات التالية[١]:

~ (ق ≡ ~ ل) ≡ ~ [(ق . ~ ل) ٧ (~ ق . ل)] (١)

≡ ~[(ق . ~ ل) . ~ (~ ق . ل)] (٢)

≡ [(~ ق ٧ ل) . (ق ٧ ~ ل)] (٣)

≡ [(ق ⊃ ل) . (~ ق ⊃ ~ ل)] (٤)

فإذا شئنا الآن أن نتأكد من صحة هذه التكافؤات جميعاً عن طريق قائمة الصدق، فلابد أن يتضح في القائمة أن لهذه الدوال جميعاً - في حالة صدقها - قيم الصدق نفسها تحت الشروط ذاتها. وهذا ما توضحه قائمة الصدق رقم (٢٧).

(١) المرجع السابق، ص ٩٨.

قائمة رقم (٢٧)

ق	ل	~ق	~ل	~(ق ≡ ~ل) ≡ ~[(ق . ~ل) ٧ (~ق . ل)] ≡ [~(ق . ~ل) . ~(~ق . ل)] ≡ [(ق ٧ ~ل) . (~ق ٧ ل)] ≡ [(ق ⊂ ل) . (~ق ⊂ ~ل)]																				
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	✓	(١٠)	(٧)	(٩)	(٨)	✓	(١٢)	(١١)	(١٥)	(١٤)	(١٣)	✓	(١٦)	(١٨)	(١٧)	✓	(١٩)	(٢١)	(٢٠)

بمقارنة الأعمدة (٦)، (١٠)، (١٥)، (١٨)، (٢١) يتضح أن جميع قيم الصدق واحدة، مما يؤكد صحة التكافؤات جميعاً، وهذا هو المطلوب إثباته.

و إذا أخذنا الآن التعريف الآخر للتكافؤ الذي يتم على أساس العطف واللزوم، أي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)]

وأردنا أن نبرهن على صحة ذلك باستخدام قوائم الصدق، فإنه ينبغي علينا أن نأتي بدوال الصدق التي تكافئ دالتنا الأصلية التي هى دالة عطفية ذات حجتين مركبتين، الأولى هى (ق ⊃ ل)، والثانية هى (ل ⊃ ق). ومن الواضح أننا نستطيع الوصول إلى دوال الصدق المكافئة لهذه الدالة عن طريق استخدام قائمة المتكافئات التي ذكرناها من قبل، وذلك بوضع دوال الصدق التي تكافئ الدالة التي لدينا، وذلك على النحو الآتي:

(ق ≡ ل) ≡ [(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)] (١)

≡ [~ (ق . ~ ل) . ~ (ل . ~ ق)] (٢)

≡ ~ [(ق . ~ ل) ٧ (ل . ~ ق)] (٣)

≡ ~ [~ (~ ق ٧ ل) ٧ ~ (~ ل ٧ ق)] (٤)

فإذا شئنا الآن أن نتأكد من صحة هذه التكافؤات جميعاً عن طريق قائمة الصدق، فلابد أن يتضح في القائمة أن لهذه الدوال جميعاً - في حالة صدقها - قيم الصدق نفسها وفي ظل الشروط نفسها. وهذا ما توضحه قائمة الصدق رقم (٢٨).

قائمة رقم (٢٨)

ق	ل	~ق	~ل	(ق≡ل)≡[(ق⊃ل).(ل⊃ق)] ≡ [~(ق . ~ل) . ~(ل .~ق)] ≡ ~[(ق . ~ل) v (ل .~ق)] ≡ ~ [~(~ق v ل) v ~(~ل v ق)]																						
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	✓	(٦)	(٨)	(٧)	✓	(١٠)	(٩)	(١٣)	(١٢)	(١١)	✓	(١٧)	(١٤)	(١٦)	(١٥)	✓	(٢٣)	(١٩)	(١٨)	(٢٢)	(٢١)	(٢٠)

بمقارنة الأعمدة (٥)، (٨)، (١٣)، (١٦)، (٢٣) يتضح أن جميع قيم الصدق واحدة، مما يؤكد صحة التكافؤات جميعاً، وهذا هو المطلوب إثباته.

استخدام قوائم الصدق في التحقق من صحة بعض الاستدلالات

في موضع سابق ذكرنا بعض الاستدلالات القائمة على أساس الروابط المنطقية، وأوضحنا أن بعض هذه الاستدلالات صحيح وبعضها باطل، وسوف نحاول الآن استخدام قوائم الصدق للتحقق من صحة أو بطلان هذه الاستدلالات:

أولاً: استدلالات قائمة على أساس التنافر

١- [~ (ق . ل) . ق] ⊃ ~ ل

٢- [~ (ق . ل) . ل] ⊃ ~ ق

٣- [~ (ق . ل) . ~ ق] ⊃ ل

٤- [~ (ق . ل) . ~ ل] ⊃ ق

ولقد أوضحنا في موضع سابق صحة الاستدلالين الأول والثاني، وبطلان الاستدلالين الثالث والرابع. وسوف نتناول كل واحد من هذه الاستدلالات الأربعة مستخدمين قائمة الصدق، لبيان صحة ما سبق أن أوضحنا.

١- [~ (ق . ل) . ق] ⊃ ~ ل

هذا استدلال يتكون من قضيتين ونتيجة، المقدمة الأولى هى:

~ (ق . ل)

وهى تقول: إنه من المستحيل أن تصدق كل من «ق»، و«ل» معاً.

وهذا معناه:

- إما أن «ق» صادقة، و«ل» كاذبة.
- أو أن «ق» كاذبة، و«ل» صادقة.
- أو أن «ق» و «ل» كاذبتان معاً.

أما المقدمة الثانية فهى: «ق »

وهى تقول: إن «ق» صادقة.

واضح أن المقدمتين تستلزمان النتيجة التي تقول:

~ ل

أي أن «ل» كاذبة.

وعلى ذلك فالاستدلال صحيح. وهذا ما تؤكده قائمة الصدق رقم (٢٩).

قائمة رقم (٢٩)

ق	ل	~ ل	[~	(ق . ل)	.	ق]	⊃	~ ل
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٥)	(٤)	(٧)	(٦)	✓	(٨)

بمقارنة العمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين. والعمود رقم (٨) الذي يمثل قيم صدق النتيجة، يتضح أن النتيجة تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، ولذا فإن كل قيم صدق اللزوم صادقة، ومن ثمّ فالاستدلال صحيح.

٢- [~ (ق . ل) . ل] ⊃ ~ ق

هذا استدلال يتكون من مقدمتين ونتيجة، المقدمة الأولى هى:

~ (ق . ل)

وهى تقول: إنه من المستحيل أن تصدق كل من «ق» و «ل» معاً.

أما المقدمة الثانية، فهى:

«ل»

وهى تقول أن «ل» صادقة. واضح أن المقدمتين تستلزمان النتيجة التي تقول:

~ ق

أي أن «ق» كاذبة.

وعلى ذلك فالاستدلال صحيح، وهذا ما تؤكده قائمة الصدق رقم (٣٠).

قائمة رقم (٣٠)

ق	ل	~ ق	[~	(ق . ل)	.	ل]	⊃	~ ق
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٥)	(٤)	(٧)	(٦)	✓	(٨)

وبمقارنة العمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٨) الذي يمثل قيم صدق النتيجة، يتضح أن النتيجة تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، ولذا فإن كل قيم صدق اللزوم صادقة، ومن ثمّ فالاستدلال صحيح.

٣- [~ (ق . ل) . ~ ق] ⊃ ل

هذا استدلال يتكون من مقدمتين ونتيجة، المقدمة الأولى هي:

~ (ق . ل)

وهى تقول: إنه من المستحيل أن تصدق كل من «ق» و «ل» معاً.

وأما المقدمة الثانية فهى:

~ ق

وهى تقول: أن «ق» كاذبة.

واضح أن النتيجة لا تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمتين. فالنتيجة، هى:

ل

أي أن النتيجة تقول بصدق «ل». في حين أن المقدمتين تقولان بأن «ل» قد تصدق وقد تكذب. لأنه إذا كان من المستحيل القول بصدق «ق» و «ل» معا، فإن هذا يعني - كما سبق أن ذكرنا - أنه قد تكذب إحداهما وتصدق الأخرى أو قد يكذبان معاً. فإذا كذبت إحداهما وهى هنا «المقدمة الثانية» ~ ق، فإن الأخرى لا تكون صادقة بالضرورة، إذ قد تصدق وقد تكذب. ومن ثمّ فإن هذا الاستدلال الذي يقول بضرورة صدق «ل» بناء على كذب «ق»، هو استدلال باطل. وهذا ما تبينه قائمة الصدق رقم (٣١).

قائمة رقم (٣١)

ق	ل	~ ق	~ [	(ق . ل)	.	~ ق)	⊃	ل
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٥)	(٤)	(٧)	(٦)	X	(٨)

بمقارنة العمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٨) الذي يمثل قيم صدق النتيجة، يتضح أن النتيجة لا تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات. ولذا فإن قيم صدق اللزوم ليست كلها صادقة، ومن ثمّ فالاستدلال باطل.

٤- [~ (ق . ل) . ~ ل] ⊂ ق

هذا استدلال يتكون من مقدمتين ونتيجة، المقدمة الأولى هي:

~ (ق . ل)

والمقدمة الثانية هي:

~ ل

ومن الواضح أنه استدلال باطل للأسباب نفسها التي ذكرناها فيما يتعلق بالاستدلال رقم (٣). وقائمة الصدق الآتية (رقم ٣٢) تبين ذلك:

قائمة رقم (٣٢)

ق	ل	~ ق	[~	(ق . ل)	.	~ ل]	⊂	ق
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٥)	(٤)	(٧)	(٦)	X	(٨)

بمقارنة العمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٨) الذي يمثل قيم صدق النتيجة، يتضح أن النتيجة لا تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات. ولذا فإن قيم صدق اللزوم ليست كلها صادقة، ومن ثمّ فالاستدلال باطل.

ثانياً: استدلالات قائمة على أساس اللزوم

١- [(ق ⊂ ل) . ق] ⊂ ل

٢- [(ق ⊂ ل) . ل] ⊂ ق

٣- [(ق ⊂ ل] . ~ ق] ⊂ ~ ل

٤- [(ق ⊂ ل) . ~ ل] ⊂ ~ ق

سوف نحاول الآن التحقق من صحة أو بطلان هذه الاستدلالات مستخدمين قائمة الصدق. ولنبدأ بالاستدلال الأول:

١- [(ق ⊂ ل) . ق] ⊂ ل

يتكون هذا الاستدلال من مقدمتين ونتيجة. المقدمة الأولى هى:

(ق ⊂ ل)

وهى تقول:

إن صدق «ق» يستلزم صدق «ل»

أما المقدمة الثانية، فهى:

«ق»

وتقول أن «ق» صادقة.

في حين أن النتيجة هى:

«ل»

أي أنها تقول: إن «ل» صادقة.

وعلى ذلك فالاستدلال ككل يقول:

إذا كانت القضية «ق» تستلزم «ل»، وكانت «ق» صادقة، فإنه يلزم عن ذلك أن تكون «ل» صادقة.

وعلينا أن نتذكر أن الحكم في القضية اللزومية، إنما يعني:

- إن صدق المقدم يستلزم صدق التالي.
- وإن صدق التالي لا يستلزم صدق المقدم.
- وإن كذب المقدم لا يستلزم كذب التالي.
- وإن كذب التالي يستلزم كذب المقدم.

وبناء على ذلك يمكننا القول أن الاستدلال الأول من الاستدلالات الأربعة الخاصة باللزوم هو استدلال صحيح. وهذا ما تؤكده قائمة الصدق رقم (٣٣).

قائمة رقم (٣٣)

ق	ل	[(ق ⊃ ل)	.	ق]	⊃	ل
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٥)	(٤)	✓	(٦)

بمقارنة العمود رقم (٥) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٦) الذي يمثل قيم صدق النتيجة، يتضح أن النتيجة تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات.

٢- [(ق ⊃ ل) . ل] ⊃ ق

هذا استدلال باطل. وهو يقول:

إذا كان صدق «ق» يستلزم صدق «ل»، وكانت «ل» قضية صادقة، لزم عن هذا أن تكون «ق» قضية صادقة أيضاً.

من الواضح أن السبب المؤدي إلى عدم صحة هذا الاستدلال، هو أن صدق التالي لا يستلزم صدق المقدم. وتوضح ذلك قائمة الصدق رقم (٣٤).

قائمة رقم (٣٤)

ق	ل	[(ق ⊂ ل)	.	ل]	⊂	ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٥)	(٤)	X	(٦)

بمقارنة العمود رقم (٥) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٦) الذي يمثل قيم صدق النتيجة، يتضح أن النتيجة لا تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، ومن ثمَّ فالاستدلال غير صحيح.

٣- [ق ⊂ ل) . ~ ق] ⊂ ~ ل

هذه الصيغة تعبر عن استدلال غير صحيح.

وتُقْرَأ:

إذا كان صدق القضية «ق» يستلزم صدق القضية «ل»، وكانت القضية «ق» كاذبة، ترتب على ذلك أن تكون القضية «ل» كاذبة.

وهذا الاستدلال غير صحيح لأننا لا نستطيع الاستدلال على كذب التالي في قضية اللزوم بناء على كذب المقدم فيها، وبعبارة أخرى نقول أن الصيغة اللزومية تعبر عن استدلال غير صحيح لأن:

ق ⊂ ل ≢ ~ ق ⊂ ~ ل

وتوضح ذلك قائمة الصدق رقم (٣٥).

قائمة رقم (٣٥)

ق	ل	~ ق	~ ل	[(ق ⊂ ل)	.	~ ق]	⊂	ل
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٧)	(٦)	X	(٨)

بمقارنة العمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٨) الذي يمثل قيم صدق النتيجة، يتضح أن النتيجة لا تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، ومن ثمّ فالاستدلال غير صحيح.

٤- [(ق ⊂ ل) . ~ ل] ⊂ ~ ق

هذه الصيغة تعبر عن استدلال صحيح.

وتُقْرَأ على النحو الآتي:

إذا كان صدق القضية «ق» يستلزم صدق القضية «ل» وكانت القضية «ل» كاذبة، ترتب على ذلك كذب القضية «ق» أيضاً.

وهو استدلال صحيح لأن كذب التالي يستلزم كذب المقدم، وتوضح ذلك قائمة الصدق رقم (٣٦).

قائمة رقم (٣٦)

ق	ل	~ق	~ل	[(ق ⊃ ل)	.	~ل]	⊃	~ق
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٧)	(٦)	✓	(٨)

بمقارنة العمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٨) الذي يمثل قيم صدق النتيجة، يتضح أن النتيجة تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، ومن ثمّ فالاستدلال صحيح.

ثالثاً: استدلالات قائمة على الفصل

١- [(ق ٧ ل) . ~ ق] ⊂ ل

٢- [(ق ٧ ل) . ~ ل] ⊂ ق

٣- [(ق ٧ ل) . ق] ⊂ ~ ل

٤- [(ق ٧ ل) . ل] ⊂ ~ ق

سوف نحاول الآن التحقق من صحة أو بطلان هذه الاستدلالات مستخدمين قائمة الصدق. ولنبدأ بالاستدلال الأول:

١- [(ق ٧ ل) . ~ ق] ⊂ ل

هذه الصيغة تعبر عن لزوم صحيح، لأن المقدم فيه يتكون من مقدمتين، إحداهما قضية فصلية (ق٧ ل) وتفيد صدق «ق» أو صدق «ل» أو صدقهما معاً. والثانية تفيد كذب «ق». إذن فلابد وأن تكون «ل» صادقة، ومن ثمّ فالنتيجة تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، طالما أن نفي أحد البديلين يترتب عليه بالضرورة صدق البديل الآخر. وقائمة الصدق رقم (٣٧) توضح ذلك:

قائمة رقم (٣٧)

ق	ل	~ ق	[(ق ٧ ل)	.	~ ق]	⊂	ل
ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	✓	(٧)

وبمقارنة العمود رقم (٦) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق النتيجة «ل» يتضح أن النتيجة تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، ومن ثمّ فالاستدلال صحيح.

٢- [(ق v ل) . ~ ل] ⊂ ق

هذا الاستدلال يتكون من مقدمتين ونتيجة، المقدمة الأولى هي:

(ق v ل)

وهى قضية انفصالية. وهى تعني:

- أن «ق»، «ل» صادقتان معاً.

- أو أن إحداهما فقط صادقة والأخرى كاذبة.

أما المقدمة الثانية، فهى:

~ ل

أي تقول بأن «ل» كاذبة.

أما النتيجة فهى تقرر صدق «ق»

ومن ثمّ فهذا الاستدلال صحيح، لأن مقدمته الأولى (ق v ل) تقول باستحالة كذب «ق»، و«ل» معاً، فإذا كانت «ل» كاذبة، فلابد أن تكون «ق» صادقة. وهذا ما تبينه قائمة الصدق رقم (٣٨).

قائمة رقم (٣٨)

ق	ل	~ ل	[(ق v ل)	.	~ ل]	⊃	ق
ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	✓	(٧)

بمقارنة العمود رقم (٦) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين، والعمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق النتيجة «ق»، يتضح أن النتيجة تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، ومن ثمّ فالاستدلال صحيح.

٣- [(ق v ل) . ق] ⊃ ~ ل

هذه الصيغة تعبر عن استدلال لزومي غير صحيح، مكون من مقدمتين ونتيجة، المقدمة الأولى (ق v ل) وهى قضية فصلية، وهى تعنى - كما سبق أن ذكرنا - صدق واحدة على الأقل من القضيتين البديلتين «ق» و «ل»، مع إمكان صدقهما معاً. وعلى ذلك فإن كذب «ل» ليس بالنتيجة الضرورية، بل هى نتيجة محتملة فحسب، لأن (ق v ل) معناها إمكان صدق «ق» و «ل» معاً، وعلى ذلك فإن صدق إحداهما لا يستلزم بالضرورة كذب الأخرى، إذ قد تكون صادقة. ومن ثمّ فالاستدلال غير صحيح، وهذا ما توضحه قائمة الصدق رقم (٣٩).

قائمة رقم (٣٩)

ق	ل	~ ل	[(ق v ل)	.	ق]	⊃	~ ل
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ك
ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	X	(٧)

بمقارنة العمود رقم (٦) الذي يمثل قيم صدق المقدمتين والعمود رقم (٧) الذي يمثل النتيجة، يتضح أن النتيجة لا تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات. ومن ثمّ فالاستدلال غير صحيح.

٤- [(ق v ل) . ل] ⊃ ~ ق

هذه الصيغة تعبر أيضاً عن استدلال غير صحيح، مكون من مقدمتين ونتيجة. المقدمة الأولى (ق v ل) هي قضية فصلية، والمقدمة الثانية هي «ل»، أما النتيجة فهي «~ ق». وعلى ذلك فهذا الاستدلال يمكن قراءته على النحو الآتي:

إن القول بصدق إحدى القضيتين «ق»، «ل» ثم القول بأن القضية «ل» صادقة في الوقت نفسه، كل هذا يلزم عنه أن تكون القضية «ق» كاذبة.

وهذا الاستدلال غير صحيح، لأن صدق القضية «ل» لا يلزم عنه كذب القضية «ق»، لأنها قد تكون صادقة أو كاذبة، ومن ثمّ فإن هذه النتيجة احتمالية أي لا تلزم لزوماً ضرورياً عن المقدمات، وهذا ما يمكن أن نتبينه من قائمة الصدق رقم (٤٠).

قائمة رقم (٤٠)

ق	ل	~ ق	[(ق v ل)	.	ل]	⊃	~ ق
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	X	(٧)

إثبات صحة متسلسلة اللزوم بواسطة قائمة الصدق

ذكرنا في موضع سابق أن الصورة الرمزية لمتسلسلة اللزوم هى على النحو الآتي:

[(ق ⊂ ل) . (ل ⊂ م)] ⊂ (ق ⊂ م)

كما ذكرنا أن هناك بعض القواعد الأساسية التي لابد من توافرها في أي متسلسلة لزومية، وهى:

١- أن يكون مقدم النتيجة هو نفسه مقدم المقدمة الأولى.

٢- أن يكون تالي النتيجة هو نفسه تالي المقدمة الثانية.

٣- أن يكون تالي المقدمة الأولى هو نفسه مقدم المقدمة الثانية.

وسوف نحاول الآن - باستخدام قائمة الصدق - البرهنة على صحة متسلسلة اللزوم.

من الواضح أن متسلسلة اللزوم تتكون من ثلاث متغيرات قضائية، هى: «ق»، «ل»، «م».

ومن ثمّ فإن قائمة الصدق سوف تتكون من ثمانية صفوف. وذلك كما يتضح من القائمة رقم (٤١).

قائمة رقم (٤١)

ق	ل	م	[(ق ⊂ ل)	.	(ل ⊂ م)]	⊂	(ق ⊂ م)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٦)	(٥)	✓	(٧)

بمقارنة العمود رقم (٦) الذي يمثل قيم صدق العطف (قيم صدق المقدمتين)، والعمود رقم (٧) الذي يمثل قيم صدق النتيجة (ق ⊂ م). يتضح أن اللزوم صحيح، إذن متسلسلة اللزوم تعبر عن استدلال منطقي صحيح. وهذا هو المطلوب إثباته.

قائمة الصدق المختصرة

إن قائمة الصدق - كما رأينا - هي طريقة آلية تهدف إلى تحديد صحة أو إتساق أية صيغة تتعلق بمنطق القضايا، ومع ذلك فإن تطبيق هذه الطريقة يحتاج إلى قدر كبير من الصبر والوقت فضلاً عما تشغله من مساحة[١]. فلقد سبق أن أوضحنا أن تكوين قائمة الصدق يتطلب معرفة عدد الصفوف وعدد الأعمدة المطلوبة وذلك بمعرفة عدد المتغيرات القضائية باستخدام هذه الصيغة ($٢^{ن}$) (أي أثنين أس «ن» حيث إن «ن» تمثل عدد المتغيرات القضائية، فإذا كانت لدينا دالة صدق تتألف من ثلاث متغيرات «ق» و «ل» و «م»، لكنا في حاجة إلى ثمانية صفوف لتكوين قائمة الصدق. أما إذا كانت لدينا دالة الصدق الآتية.

[[(ق ⊂ ل) . (م ⊂ ن)] . (ق ٧ م)] ⊂ (ل ٧ ن)

فإننا نجد أنها تحتوى على أربعة متغيرات قضائية هى «ق» و «ل» و «م» و «ن». وفي هذه الحالة سوف نحتاج إلى ستة عشرة صفاً، وذلك على النحو الذي توضحه قائمة الصدق رقم (٤٢).

---

(1) Schipper, Edith Watson, A First Course in Modern Logic, pp. 176 - 177.

قائمة صدق رقم (٤٢)

ق	ل	م	ن	{[(ق ⊂ ل)	.	(م ⊂ ن)]	.	(ق ∨ م)}	⊂	(ل ∨ ن)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ك
				(١)	(٣)	(٢)	(٥)	(٤)	(٧)	(٦)

وهكذا فإن عدد الصفوف في قائمة الصدق قد يزيد ليصل إلى ٣٢ صفاً أو إلى ٦٤ صفاً أو أكثر وفقاً لزيادة عدد المتغيرات القضائية في دوال الصدق المطلوب إثبات صحتها أو بطلانها.

من الواضح إذن إن قائمة الصدق المطولة تصبح مركبة حين يزيد عدد المتغيرات القضائية عن ثلاثة. ومن ثمّ قضت الحاجة بوجود وسيلة أخرى تكون أكثر اختصاراً.

وسوف نعرض الآن لطريقة أخرى يُطْلَق عليها اسم قائمة الصدق المختصرة shorter truth table -. وتعتمد هذه الطريقة على برهان الخلف[١] reductio ad absurdum، وهو نوع من البرهان المنطقي الذي يهدف إلى إثبات صحة المطلوب بإبطال نقيضه أو فساد المطلوب بإثبات نقيضه[٢]. ويمكننا اتباع الخطوات الثلاث الآتية للبرهنة على ما إذا كانت الصيغة المنطقية التي لدينا صحيحة أو باطلة:

[(ق ⊃ ل). ق] ⊃ ل

أولاً: نفترض أن هذه الصيغة غير صحيحة «ك»، وحيث إنها عبارة عن استدلال لزومي، فإنه سوف يترتب على ذلك أن يكون المقدم صادق «ص»، والتالي كاذب «ك».

ثانياً: نتتبع بكل دقة النتائج المترتبة على هذا الفرض الذي افترضناه في الخطوة السابقة. ثم نحاول بقدر المستطاع إثبات صدق هذا الافتراض.

ثالثاً: إذا فشلنا في محاول إثبات صدق الافتراض. فهذا معناه أن الاستدلال الذي لدينا صحيح. أما إذا نجحنا في محاول إثبات صدق الافتراض، فهذا معناه أن الاستدلال الذي لدينا باطل[٣].

هذه خلاصة قائمة الصدق المختصرة، ولنبدأ بتطبيق هذه القائمة على الاستدلال السابق ذكره[٤]، وهو:

[(ق ⊃ ل) . ق] ⊃ ل

١- نكتب الاستدلال السابق هكذا:

[(ق ⊃ ل) . ق] ⊃ ل

---

(1) Carmey and Scheer, Fundamentals of Logic, p. 206.

(٢) مجمع اللغة العربية، المعجم الفلسفي، المطابع الأميرية، القاهرة، ١٩٧٩، ص ٣٣.

(3) Camey and Scheer, Fundamentals of Logic, p. 205.

(٤) د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، ص ص ١٤٧ - ١٤٨.

٢- نعين قيمة الكذب بالنسبة للثابت الرئيسي في الاستدلال، وهو هنا اللزوم الثاني، هكذا:

[(ق ⊃ ل) . ق] ⊃ ل

ك

تكذيب الاستدلال هو أساس هذه البرهنة، ولذلك سوف نعده خطوة أولية دون أن نعطيها رقماً في الخطوات.

٣- ولكي يكون هذا الفرض صحيحاً لابد أن يكون المقدم صادقاً والتالي كاذباً أي:

[(ق ⊃ ل) . ق] ⊃ ل

ص ك ك

١ ١

٤- ولكي يكون العطف (المقدم) صادقاً، لابد أن يكون المعطوفان صادقين:

[(ق ⊃ ل) . ق] ⊃ ل

ص ص ص ك ك

٢ ١ ٢ ١

٥- ولنحاول الآن أن نضع قيماً لبقية المكونات، على نحو تكون معه هذه المكونات متسقة مع الفرض الذي افترضناه. فيكون لدينا ما يلي:

[(ق ⊃ ل) . ق] ⊃ ل

ص ص ك ص ص ك ك

٣ ٢ ٣ ١ ٢ ١

X

وهنا لا نستطيع أن نجعل المعطوف الأول في المقدمات صادقاً، لأنه يمثل دالة لزومية، ولا تكون الدالة اللزومية صادقة إذا كان مقدمها صادقاً وتاليها كاذباً، وعلى ذلك يكون المعطوف الأول هنا كاذباً بالضرورة. وبالتالي يكون العطف كاذباً. أي أن المقدمات كاذبة، وهى تمثل «المقدم «بالنسبة للاستدلال الذي لدينا، والنتيجة كاذبة وهى تمثل «التالي «بالنسبة للاستدلال الذي لدينا، وحيث أنه استدلال لزومي، مقدمه كاذب وتاليه كاذب، إذن فهو استدلال صحيح.

وهكذا نلاحظ أن قائمة الصدق المختصرة هى أداة فنية سهلة وبسيطة للتثبت من صحة الاستدلال أو عدم صحته، كما أنها من الناحية العملية أسهل في إجرائها من القائمة الكاملة وخاصة حينما يكون عدد المتغيرات الواردة في الدالة كبيراً. ولكن ذلك لا يعني بالطبع إمكان الاستغناء عن قائمة الصدق المطولة، إذ إن تحديد قيم صدق الدوال لا ينتج من تطبيق القائمة المختصرة، بل باستخدام قائمة الصدق المطولة، كما أنها أيضاً في الوقت نفسه وسيلة من وسائل معرفة صحة الاستدلالات المنطقية أو عدم صحتها، والواقع أن لكل طريقة من الطريقتين مزاياها. فإذا كانت القائمة المطولة وسيلة لمعرفة قيم صدق الدالة، وتعجز القائمة المختصرة عن هذا الأمر، فإن هذه الأخيرة تكشف لنا عن مدى صحة الحجج الاستنباطية بطريقة أكثر سهولة وبساطة من قائمة الصدق المطولة[1].

---

(١) المرجع السابق، ص ١٥٣.

الفصل الثالث

المنطق الثلاثي القيَم

تمهيد

لقد أوضحت عملية مراجعة المنطق أن المنطق التقليدي هو منطق ثنائي القيم، فهو لا يعرف سوف قيمتي «الصدق» و«الكذب» ولا شيء بين هذين الإمكانين. ويُطْلَق على هذا المبدأ في المنطق التقليدي اسم «مبدأ الثالث المرفوع» وهو يقول بعدم وجود قيمة ثالثة بين الصدق والكذب[١]. غير أن المنطق الاحتمالي يفترض وجود قيمة ثالثة، غير القيمتين اللتين كانتا معروفتين لدى الفلاسفة، ولدى العلماء حتى اكتشاف حساب الاحتمالات منذ وقت ليس ببعيد. فكان أرسطو وغيره من علماء المنطق يظنون أن الحكم إما أن يكون صادقاً صدقاً مطلقاً، أو كاذباً كذباً مطلقاً. فما يعلمه رجل المنطق عن حالة الطقس هو «أن السماء سوف تمطر أو لن تمطر غداً»، ومن ثمَّ فإن هذا التنبؤ لن يفيد كثيراً من يرغب في معرفة حالة الطقس غداً، لأن الحديث عن الصدق والكذب لا يكون أمراً مشروعاً إلا حين تكون هناك سبل موصلة إلى الصدق ولكن حين تثار أسئلة تتعلق بالطبيعة، فإنه يصبح من المستحيل في هذه الحالة العثور على إجابة عنها. وسيكون من حقنا القول بأنها تتعلق بأحكام لا هي صادقة ولا هي كاذبة[٢].

لهذه الأسباب اهتم ريشنباخ بالتأكيد على أنه لا منطق سوى منطق الاحتمال، لأن

---

(1) Reichenbach, H., Philosophy and Physics, P. 8

(2) Ibid., P. 8.

كل منطق حقيقي إنما هو منطق احتمالي، وأن المنطق التقليدي منطقاً خاطئاً لأنه يقتصر على تصنيف القضايا إلى «صادقة» و«كاذبة»،[١] في حين أن الصدق والكذب - في رأي ريشنباخ - حدان أعلى وأدنى، تقع بينهما درجات الاحتمال المتفاوتة، دون أن يكون الحدان الأعلى والأدنى درجتين من تلك الدرجات، وعلى ذلك يرى ريشنباخ ضرورة هدم المنطق القديم ذي القيمتين، وبناء منطق جديد يتسع للتفاوت في القيم الاحتمالية[٢].

يقول ريشنباخ: «إن لغتنا المعتادة مبنية على منطق ثنائي القيم، أي على منطق قيمتى الصدق فيه هما «الصدق» و«الكذب». ولكن من الممكن تكوين منطق ثلاثي القيم، فيه قيمة متوسطة هى اللاتحديد indeterminancy، وفي هذا المنطق تكون القضايا إما صادقة وإما كاذبة، وإما لا محدّدة. وبواسطة هذا المنطق، يمكن كتابة ميكانيكا الكوانتم بنوع من اللغة المحايدة، التي لا تتحدث عن الموجات أو الجسيمات، بل تتحدث عن الاتفاقات، أي الصدمات. مثل هذا المنطق يبدو أنه هو الصورة النهائية لفيزياء الكوانتم - بالمعنى البشري لهذا التعبير»[٣]. فالطابع الاحتمالي للتنبؤات المتعلقة بميكانيكا الكوانتم يؤدي إلى استحالة اعادة تكرار وقوع الحادثة المفردة، ويتم التعبير عن هذه الحقيقة من خلال النظر إلى القيمة غير الملاحظة بوصفها قيمة لا محدّدة، ومن هنا فإن اللاتحديد يُعَد - في نظر ريشنباخ - قيمة صدق ثالثة[٤]. وهذه القيمة الثالثة تعنى أنه من المستحيل التحقق من صدق أو كذب الحكم، أي توجد قيمة متوسطة بين الصدق والكذب، وهى قيمة اللاتحديد[٥].

ويرى ريشنباخ أنه يمكن تطبيق قيمة اللاتحديد على مجموعة القضايا التي تسمى في تفسير بور - هايزنبرج the Bohr-Heisenberg interpretation باسم القضايا الخالية من المعنى. ويمكن تقديم تبريرات عديدة لمثل هذا التفسير، فإذا كان ثمة كيان ما يمكن

(1) Russell, B., Human Knowledge, P. 385.

(٢) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢، ص ٣٦٢.

(٣) ريشنباخ، نشأة الفلسفة العلمية، ص ١٦٩.

(4) Reichenbach, H., Philosophic Foundations of Quantum Mechanics, P. 145.

(5) Reichenbach, H., Philosophy and Physics, P. 8.

قياسه تحت ظروف معينة، ولا يمكن قياسه تحت ظروف أخرى، فإنه من الطبيعي النظر إلى قيمة صدقه تحت هذه الظروف الأخيرة بوصفها قيمة لا محددة[1]. ويرفض ريشنباخ تنحية القضايا المتعلقة بهذا الكيان من مجال القضايا التي لها معنى، ويقول إنه يمكن تناول مثل هذه القضايا لا بوصفها صادقة ولا بوصفها كاذبة، وإنما بوصفها ذات قيمة صدق لا محددة.

ويدعو ريشنباخ إلى ضرورة أن نميز بدقة بين معنى مصطلح «لا محدَّدة» ومعنى مصطلح «غير معروفة»، فالمصطلح الأخير يمكن تطبيقه حتى على قضايا المنطق الثنائي القيمة. ففي مجال المنطق التقليدي، إذا كانت قيمة صدق قضية ما «غير معروفة»، فإننا ندرك عندئذ إنها إما أن تكون صادقة وإما أن تكون كاذبة، إذ إن مبدأ الثالث المرفوع أو الوسط الممتنع - الذي يظهر في التعبير السابق - هو أحد دعامات المنطق التقليدي، غير أن هذا المبدأ لم يعد هو الصيغة الصحيحة، إذ توجد قيمة متوسطة بين الصدق والكذب، هي - كما سبق أن ذكرنا - اللاتحديد[2].

ولقد أمكن إقامة منطق ثلاثي القيم بفضل دقة وإحكام المنطق الرياضي الحديث. ويمكن تطبيقه على التفسير الخاص بميكانيكا الكوانتم، في حين يظل من الممكن - كما كان الحال دائماً - النظر إلى الأحكام التي تتعلق بالحوادث التي يمكن ملاحظتها بوصفها إما صادقة أو كاذبة. أما الأحكام الخاصة بالحوادث غير الملاحظة فتعد أحكاماً غير محددة. وبفضل هذه الأداة المنطقية تم وضع تفسير للسلوك غير المعقول - والذي كان مستبعداً - الخاص بالموضوعات غير الملاحظة. لقد استُبْعِد هذا السلوك من مجال الأحكام القابلة للتحقق، وتم إدخاله في دائرة اللاتحديد. وبالتالي أخذت فيزياء الكوانتم صورة تتفق ومطالب علم فيزيائي قد تخلى عن النمط السوي للسببية. وباستعارتنا لتعبير «جاليليو» يمكننا القول: إن ميكانيكا الكوانتم قد كُتِبَت بلغة منطق ثلاثي القيم[3].

(1) Reichenbach, H., Philosophy Foundations of Quantum Mechanics, p.145.

(2) Ibid., P. 145.

(3) Reichenbach, H., Philosophy & Physics, P. 9.

النشأة التاريخية لمفهوم الاحتمال

صار مفهوم الاحتمال، كما يُستَخدَم في الرياضيات والفيزياء الرياضية والعلوم الإحصائية، موضوعاً لأحد أفرع الرياضة البحتة، يُطلَق على هذا النوع اسم «حساب الاحتمالات»، ويعتمد حساب الاحتمالات على المعادلات الرياضية المجردة، كما يعتمد في تطبيقاته على مناهج الإحصاء الرياضية[1]. ولقد بلغ «حساب الاحتمالات» حداً كبيراً من الاكتمال، رغم نشأته القريبة، إذ بدأ مع أبحاث باسكال Pascal وفيرما Fermat[2]، وذلك في صيف عام ١٦٥٤ عندما طرح الشفالييه دي ميريه Chevalier de Mere على باسكال سؤالين متعلقين بألعاب الحظ، يقول السؤال الأول: «على فرض أننا نلعب الزهر (النرد). فما هو أقل عدد من الرميات يستطيع المرء بعدها أن يتوقع أن يظهر رقم ٦ في زهرتي اللعب معاً؟». أما السؤال الثاني، فيقول: «إذا أوقف اللاعبان لعبهما مختارين قبل نهاية الدور، وبحثا عن تقسيم عادل لما جاء به الحظ لكل منهما، فما نصيب كل منهما تبعاً لاحتمال كسبه الدور في ذلك الوقت؟»[3].

نجح باسكال في الإجابة عن السؤالين، وتوصل إلى اكتشاف طريقتين من طرق حساب الاحتمالات، واكتشف ثالثتهما «فيرما» الذي راسله بسكال في ذلك الوقت، وقد نُشِرَت ثلاث من هذه الرسائل - التي كُتِبَت سنة ١٦٥٤ - عام ١٦٧٩، ثم أعيد نشرها في مجموعة مؤلفات بسكال سنة ١٨١٩. ولقد كان منهج بسكال يقف عند حد لاعبين، أما منهج فيرما فكان يقوم على الاقترانات المتعددة، ويمتد ليشمل أي عدد من اللاعبين. ولقد دار النقاش بين بسكال وفيرما حول هذه النقطة، اعترف باسكال في نهايته بسلامة منهج فيرما[4].

(1) Reichenbach, H., Experience and Predication, the University of Chicago, 1952 , P. 198.

(2) Ibid., P. 198.

(٣) د. نجيب بلدي، بسكال، القاهرة، دار المعارف، سلسلة نوابغ الفكر الغربي، ١٩٦٨، ص ٤٠.

(٤) محمود أمين العالم، فلسفة المصادفة، ص ١٩٩.

ومن بين مسائل الخلاف التي أُثيرت بين باسكال وفيرما أيضاً هذه المسالة البسيطة:

شخص عليه أن يرمى الرقم ٦ بزهرة اللعب في ٨ رميات، فلو افترضنا أنه رمى ثلاث رميات بدون نجاح، فما مقدار نسبة ما يُسْمَح له بأخذه من الرهان لو تنازل عن الرمية الرابعة؟

إن مصادفة النجاح في الرمية الواحدة المستقلة هى $\frac{١}{٦}$، وعلى هذا فله أن يأخذ $\frac{١}{٦}$ الرهان لو تنازل عن رمية من الرميات، على أن الرمية الرابعة ليست مستقلة. فالرمية الأولى وحدها هى التي تساوي $\frac{١}{٦}$، والثانية تساوي $\frac{١}{٦}$ الباقي أي $\frac{٥}{٣٦}$ من الرهان، والثالثة تساوي $\frac{١}{١٦}$ الباقي أي $\frac{٢٥}{٢١٦}$، أما الرمية الرابعة فتساوي $\frac{١}{٦}$ الباقي الأخير أي تساوي $\frac{١٢٥}{١٢٩٦}$ من الرهان(١).

وهكذا كانت مسألة النقط هى المسألة الرئيسية التي أثارت الخلاف، ووضعت في الوقت نفسه النواة الأولى لحساب الاحتمالات.

إن تصور الاحتمال الرياضي (حساب الاحتمالات)، وإن كان قد بدأ في النصف الثاني من القرن التاسع عشر على يد بسكال وفيرما - كما أشرنا - فإنه استمر في تطوره بفضل جهود لابلاس Laplace وجاوس Gauss إلى أن وصل هذا التطور إلى ذروته في المؤلفات العميقة التي قام بوضعها عدد كبير من علماء الرياضة المعاصرين(٢). وتستلزم كل محاولة لوضع نظرية عن التصور الرياضي للاحتمال أن نبدأ من الصورة الرياضية لهذا التصور، ومن هنا سعى بعض الرياضيين إلى القيام بدراسات حديثة من أجل بلورة أسس التصور الرياضي للاحتمال(٣).

ومع هذا، يجب علينا أن ننبه إلى وجود تصور آخر للاحتمال، لا يبرز من خلال الصورة الرياضية، ونعني به: مفهوم الاحتمال كما يُسْتَخدم في المحادثات الجارية،

(١) المرجع السابق، ص ٢٠٠.

(2) Reichenbach, H., Experience and Predication, P. 298.

(3) Ibid., P. 298.

والذي نعبر عنه بالكلمات الآتية: «ممكن» و«محتمل» و«مرجّح»[1]. إن استخدام هذا المفهوم لا يقتصر على لغة الحياة اليومية، بل يُسْتَخدم أيضاً في اللغة العلمية وذلك حين يتطلب الأمر بعض التخمينات والتكهنات[2]. إننا نطلق الأحكام العلمية دون الإدعاء بأنها يقينية، إننا نقول بهذه الأحكام على سبيل الاحتمال أو بوصفها على درجة عالية من الترجيح. إن كلمة «محتمل» probable في مثل هذا السياق لا تخضع لطرق إحصائية. ومن الملاحظ أن هذا التصور المنطقي للاحتمال - والذي لا يمكن الاستغناء عنه لإقامة المعرفة - لم يصل، رغم أهميته، إلى تحديد دقيق كالذي توصل إليه التصور الرياضي للاحتمال[3].

والحق أن المناطقة قد انشغلوا طوال الوقت - منذ أرسطو وحتى اليوم - بالتصور المنطقي للاحتمال، ولذا فإن المعالجة العلمية لهذا التصور هى أقدم بكثير من المعالجة العلمية للتصور الرياضي (الذي بدأ مع باسكال وفيرما). ومع هذا فإن نظرية التصور المنطقي للاحتمال مازالت عاجزة عن بلوغ الدرجة نفسها من الاكتمال التي وصلت إليها نظرية التصور الرياضي له[4].

كانت الميزة الكبرى لمبدعي المنطق الرمزي أنهم عقدوا العزم منذ البداية على جعل منطق الاحتمال يصل إلى دقة المنطق الثنائي القيمة. فلقد طالب «ليبنتس» Leibnitz ببرنامج لصياغة منطق للاحتمال في صورة منطق كمي لقياس درجات الحقيقة. ولم يتحقق هذا المطلب إلا في القرن التاسع عشر. لقد ظهرت في هذا الصدد بعض المحاولات من جانب «دي مورجان». غير أن «جورج بول» Boole , G. كان هو الواضع الحقيقي لأول حساب متكامل لمنطق الاحتمال - رغم أن بيرس Peirce قام فيما بعد بتصحيح بعض أخطاءه - إن منطق بول يُعَد أعظم إنجاز في تاريخ التصور المنطقي للاحتمال منذ أرسطو[5]. وظل

(1) Ibid., P. 298.
(2) Ibid., PP. 298 - 299.
(3) Ibid., P. 299.
(4) Ibid., P. 299.
(5) Ibid., p. 299.

منطق الاحتمال يواصل مسيرته من خلال أعمال فن Venn وبيرس كل على حده[١]. كما استمر عند بعض المناطقة المعاصرين من أمثال: كينز Keynes ولوكاشيفتش Lukasiewicz وزوريسكي Zawirski[٢].

إن خطى تطور الاحتمال الرياضي والاحتمال المنطقي تكشف عن وجود تصورين للاحتمال: تصور رياضي وآخر منطقي. قد يبدو ثمة تشابه وارتباط معين بين التصورين، غير أن هناك، من جانب آخر تمايز تام بين الطبيعة المنطقية لكل منهما، ومن هنا انقسم المناطقة إزاء هذا الموقف إلى فريقين[٣]:

الفريق الأول: يؤكد أصحابه - بشكل ضمني أو صريح - أن هناك تمايزاً واضحاً بين التصور الرياضي والتصور المنطقي للاحتمال.

الفريق الثاني: يتمسك بأن هذا التمايز الظاهر بين التصورين لا يمثل اختلافاً جوهرياً بينهما.

ولقد كشفت أبحاث قريبة العهد عن تمايز التصورين، واستنادهما إلى أساس واحد، وأن بين التصورين هوية[*]، وأن القول بهويتهما يسمح بفهمهما فهمًا أعمق. ولقد أحتل الصراع بين كلا الفريقين حيزاً كبيراً من المناقشة الفلسفية بمشكلة الاحتمال. وكانت نتيجة هذا الصراع على جانب كبير من الأهمية، فما أن توصلت النظرية الرياضية في الاحتمال إلى حل مرضٍ، حتى انتهى الفريق المدافع عن هوية التصورين - الرياضي

(1) Ibid.,P. 299.

(2) Ibid., P. 299 - 300

(3) Ibid., P. 300.

(*) تذكرنا هذه المشكلة (التمايز أو التماثل بين التصور الرياضي والتصور المنطقي للاحتمال) بالمشكلة الأعم، ونعني بها: التمايز أو التماثل بين الرياضة البحتة والمنطق الصوري، وقد حسم كل من نورث هوايتهد Whitehead, A. N.(١٨٦١ - ١٩٤٧) وبرتراند رسل، هذه المشكلة في كتابهما «برنكيبيا ماتماتكا» أن وحدا بين الرياضة والمنطق في نسق موحد مما ترتب عليه استحالة وضع خط فاصل بينهما، إذ الواقع - كما يقول رسل - أن الاثنين شيء واحد. والخلاف بينهما كالخلاف بين الصبي والرجل، فالمنطق شباب الرياضيات، والرياضيات تمثل طور الرجولة للمنطق (رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ٢٠٨).

والمنطقي للاحتمال - إلى حل المشكلة الفلسفية للاحتمال برمتها، بينما ترك الفريق المدافع عن التمايز بينهما، مشكلة التصور المنطقي للاحتمال معلقة على نحو غير مرضٍ[١].

الاحتمال الرياضي

يقوم الاحتمال الرياضي على أساس ارتباط قضيتين إحداهما معروفة لنا تماماً في حين تكون الأخرى مجهولة لنا تماماً[٢]. إن درجة احتمال قضية ما، لا تتوقف على شيء في طبيعتها، وإنما تتوقف على نسبتها إلى قضية أخرى، وحسبنا أن نعلم أن درجة احتمال القضية الواحدة، تختلف باختلاف القضية الأخرى التي ننسبها إليها. أو بعبارة أخرى: إن درجة احتمال قضية ما متوقفة على ما لدينا من معلومات، أو على ما لدينا من شواهد، فإن قيل لنا أن فيلاً يسير شارداً في الطريق العام، كان احتمال الصدق ضعيفاً جداً، لأننا ننسب هذا القول إلى ما نعلمه في خبرتنا الماضية عما يسير في الطريق العام وما لا يسير، لكن لو قيل لنا إن سيارة تسير في الطريق، كان احتمال الصدق قوياً جداً، لأننا هنا أيضاً ننسب القول إلى ما نعلمه عن الأشياء التي تسير في الطريق. وهكذا تزيد درجة احتمال القول أو تنقص حسب الشواهد التي ننسبها إليه[٣].

وينشأ الاحتمال الرياضي - كما أشرنا - عن ارتباط قضيتين، إحداهما معروفة تماماً، في حين أن الأخرى تكون غير معروفة على الاطلاق، فإذا سحبت ورقة من أوراق اللعب، فما هو احتمال أن تكون هذه الورقة مكتوبا عليها الرقم (١)؟ إن عدد الأوراق معروف لنا تماماً وهو أثنتان وخمسون ورقة - ونعلم أيضا أن بين كل ثلاث عشرة ورقة توجد ورقة واحدة تحمل الرقم (١)، ولكننا نجهل تماماً رقم الورقة التي سأسحبها. ولكننا بعملية حسابية بسيطة نحصل على درجة الاحتمال المطلوبة[٤].

---

(1) Ibid., P. 300

(2) Russell, B., Human Knowledge, P. 354.

(٣) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢، ص ص ٣٤١ - ٣٤٢.

(4) Russell, B., Human Knowledge, P. 354.

والحقيقة الأساسية التي يجب أن نضعها نصب أعيننا هى وجود نظرية رياضية في الاحتمال، وأن هناك إجماع شبه تام بين علماء الرياضة - المشتغلين بهذه النظرية - على أن كل شيء يمكن التعبير عنه بالرموز الرياضية ومع هذا فليس هناك اتفاق نهائي على تفسير الصيغة الرياضية. في مثل هذه الحالة فإن أبسط الاجراءات التي يمكن أن تُتْخَذ هو أن نسرد البديهيات Axioms التي تُسْتَدل منها النظرية الرياضية في الاحتمال[١] - وهذا ما سنفعله في الفقرة رقم (٥) - ومن ثمّ نقرر أي التصورات يفي بمطالب هذه البديهيات ويكون جديراً - من وجهة النظر الرياضية - أن يسمى «احتمال». ويرى «رسل» أنه إذا كانت هناك كثرة من التصورات، وإذا كنا قد قررنا أن نختار بينها، فإن دوافع الاختيار تقع خارج الرياضيات[٢].

ويطرح «رسل» تصوراً Concept بسيطاً وملائماً يفي بمطالب بديهيات نظرية الاحتمال، فيقول: بافتراض فئة محدودة (ب) بها الأعضاء (ن)، وأن (م) من هذه الأعضاء ينتمي إلى فئة أخرى (أ)، عندئذ نقول إنه إذا اختير عضو من (ب) عشوائياً، كان احتمال انتمائه للفئة (أ) هو $\frac{م}{ن}$[٣].

وجدير بالذكر أنه ليس هناك مجال للصدق أو الكذب فيما يتعلق باختيار التصور الملائم، إذ إن أي تصور يشبع هذه البديهيات يمكن أن يُؤْخَذ على أنه تفسير رياضي للاحتمال[٤]. وقد تتجه رغبتنا إلى تبني تفسير Interpretation ما في سياق معين، وتفسير آخر في سياق آخر، ومن هنا تتعدد التفسيرات، لأن الملاءمة هى الدافع الذي يرشدنا لاختيار تفسير دون آخر. وعادةً ما يكون هذا هو الموقف إزاء تفسير النظريات بصفة عامة[٥].

ولكي يوضح «رسل» كيف أن النظرية الرياضية في الاحتمال تُشْتَق من عدد معين من البديهيات يضرب مثلاً باشتقاق علم الحساب بالكامل من خمس بديهيات وضعها «بيانو»

(1) Ibid., P. 356.
(2) Ibid., P. 356.
(3) Ibid., P. 356.
(4) Ibid., P. 356.
(5) Ibid., P. 357.

Peano. فلقد أثبت بيانو أن نظرية الأعداد الطبيعية كلها يمكن أن تُشْتَق من ثلاثة مفاهيم أولية، وخمس قضايا أولية، بالاضافة إلى قضايا المنطق البحت. والمفاهيم الثلاثة الأولية في حساب بيانو هى:

«الصفر»، «العدد»، «التالي».

والمقصود بـ «التالي» العدد «المابعد» في الترتيب الطبيعي، أي أن تالي الصفر هو الواحد، وتالي الواحد أثنان ... وهكذا[1]. والقضايا الأولية الخمس التي يفترضها بيانو والتي تعد بمثابة العلاقات المنطقية التي تبين استعمال تلك الحدود، هى:

١- «الصفر» عدد.

٢- «تالي أي عدد» هو عدد.

٣- ليس لعددين نفس التالي.

٤- ليس الصفر تالياً لأي عدد.

٥- كل خاصية للصفر بما أنها تصدق عليه بوصفه عدداً فهى تصدق على العدد التالي له كما تصدق على التالي لما يليه[*]، وهكذا.

إن نظرية الأعداد الطبيعية تنشأ من هذه المفاهيم الثلاثة والقضايا الخمس[**]. وكما

---

(١) «رسل»، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ٩.

(*) من الملاحظ أن البديهية الأخيرة - من بديهيات «بيانو» الخمس - هى التي تتضمن اطراد العمليات الحسابية مثل الجمع والضرب مثلاً. وقد أطلق هنري بوانكاريه Poincare (١٨٥٤ - ١٩١٢) على هذه الخاصية اسم «الاستقراء الرياضي» أو الاستقراء بالتكرار، أما برتراند رسل فقد أسماها الخاصية «الوراثية» للأعداد أي أن ما يصدق على عدد ينتقل بالوراثة إلى غيره (د. محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضية، صفحة١٢١).

(**) يمكننا أن نشير باختصار إلى الكيفية التي بها تنشأ نظرية الأعداد الطبيعية من المفاهيم الثلاثة والقضايا الخمس الأولية التي وضعها «بيانو»، وذلك على النحو التالي: نُعرِّف العدد «١» بأنه «تالي» الصفر، وبأن العدد «٢» «تالي»الواحد، وأن العدد «٣» «تالي» العدد «٢»... وهكذا. وواضح أننا نستطيع أن نسير إلى أي حد نريد بهذا التعريف لأنه بمقتضى القضية الثانية - من قضايا «بيانو «الخمس - نجد أن كل عدد نصل إليه فله تال، وبمقتضى القضية الثالثة، نجد أنه لا يمكن أن يكون هذا التالي أي عدد من الأعداد التي عُرِّفَت من قبل، لأنه لو كان كذلك فسيكون لعددين مختلفين نفس التالي، وبمقتضى القضية الرابعة نجد أنه =

نشأت نظرية الأعداد الطبيعية من عدة مفاهيم أولية، تنشأ نظرية الاحتمال الرياضية - على النحو نفسه - من مجموعة بديهيات.

غير أن مفاهيم «بيانو» الأولية الثلاثة - التي هى «الصفر» و«العدد» و«التالي» - تقبل عدداً لا نهاية له من التفسيرات(*)، تحقق جميعها القضايا الأولية الخمس(١)، ولكننا نختار منها ما يصلح للرياضة البحتة وما يناسب الحياة اليومية أيضاً. وبالمثل في حالة نظرية الاحتمالات الرياضية يتم اختيار التفسير وفقاً للغرض الذي نضعه نصب أعيننا(٢).

بديهيات نظرية الاحتمال

هناك مجموعة من البديهيات - تكاد تكون واحدة عند معظم الباحثين - تستند إليها النظريات المختلفة في تفسير الاحتمال، ولقد عرضها «برتراند رسل» في كتابه «المعرفة

=لا عدد من الأعداد التي نصل إليها في هذه المتسلسلة يمكن أن يكون الصفر. وبذلك تعطينا متسلسلة التوالي متسلسلة لا آخر لها من أعداد جديدة باستمرار. ومن القضية الخامسة نجد أن جميع الأعداد ترد في هذه المتسلسلة التي تبدأ من الصفر وتستمر في سيرها عن طريق التوالي المتعاقبة، لأن:

أ- الصفر ينتمي إلى هذه المتسلسلة.

ب- إذا انتمى عددان إلى هذه المتسلسلة فإن تاليه ينتمي كذلك إلى هذه المتسلسلة. ومن ثم فبالاستقراء الرياضي كل عدد ينتمي إلى المتسلسلة. وهكذا نشأت نظرية الأعداد الطبيعية من عدة مفاهيم أولية. (رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٠).

(*) قدم «رسل» (في كتابه: مقدمة للفلسفة الرياضية، صفحة ١٢ وما بعدها) عدة تفسيرات لمفاهيم «بيانو» الأولية الثلاثة، محاولاً التدليل على أنه ليس في نظام «بيانو» ما يمكّننا من التمييز بين التفسيرات المختلفة لمفاهيمه الأولية. وكأن «بيانو» يفترض أننا نعرف ما نقصده بـ «الصفر وأننا سوف لا نفترض أن هذا الرمز يعني «١٠٠» أو أي شيء آخر مما يمكن أن يرمز إليه، إذ من الممكن - كما بيّن «رسل» - أن نأخذ «الصفر» ونعني به «١٠٠»، ونأخذ «العدد» لنعني به الأعداد من «١٠٠» فصاعداً في متسلسلة الأعداد الطبيعية، وبذلك تتحقق جميع القضايا الأولية الخمس، وواضح أن أي عدد يمكن أن يوضع بدلاً من الـ «١٠٠» في هذا المثال. ويكون تفسيرنا في هذه الحالة صحيحاً أيضاً.

ويؤكد «رسل» على أننا نتطلب من الأعداد، لا مجرد تحقيق الصيغ الرياضية، بل لتنطبق بطريقة صحيحة على الأشياء العادية، نريد أن يكون لنا عشرة أصابع وعينان، وأنف واحد. فالنظام الذي فيه «١» يُقصَد به «١٠٠»، «٢» يُقصَد به «١٠١».... وهكذا، قد يصلح للرياضة البحتة، ولكنه لا يناسب الحياة اليومية.

(١) المرجع السابق، ص ١٢.

(3) Russell, B., Human Knowledge , P. 357.

البشرية» Human Knowledge نقلاً عن «برود» .Broad, C. D. ويشير «رسل» بـ $\frac{ب}{أ}$ إلى الفكرة غير المُعَرَّفة والتي تعبر عن «احتمال ب إذا كانت لدينا أ». وهذه الفكرة غير المعُرَفَّة إنما يقصد بها «رسل» إنها تُعَّرف فقط عن طريق بديهيات معينة، وأي شيء يتفق ومتطلبات هذه البديهيات هو «تفسير لحساب الاحتمالات»[1]. وعلى ذلك فمن المتوقع أن تكون هناك عدة تفسيرات ممكنة، ليس من بينها ما هو أكثر صواباً أو مشروعية من الآخر، ولكن ربما يكون أحد التفسيرات أكثر أهمية من غيره، تماماً كما هو الحال بالنسبة لبديهيات «بيانو» الخمس للحساب. فلقد رأينا أنها تقبل عدداً لا نهاية له من التفسيرات إلا أن تفسير الأعداد الطبيعية بأنها تبدأ بالصفر، أهم من تفسيرها على أنها تبدأ بالعدد ٣٧٨١ مثلاً، وهو أكثر أهمية لأنه مقبول في الصياغات الرياضية البحتة وفي الحياة اليومية على السواء[٢]. وحالياً سنغض الطرف عن كل المشاكل المتعلقة بالتفسير ونواصل المعالجة الصورية المجردة للاحتمال. وها هي بديهيات نظرية الاحتمال[٣]:

١- إذا افترضنا (ب) و(أ) فهناك قيمة واحدة فقط لـ $\frac{ب}{أ}$، ولذا يمكننا أن نتحدث عن «احتمال (ب) على أساس (أ)».

٢- إن القيم الممكنة للصيغة $\frac{ب}{أ}$ هى كل الأعداد الحقيقية ابتداءً من الصفر وانتهاء بالواحد الصحيح وما بينهما.

٣- إذا كانت (أ) تستلزم (ب) كانت $\frac{ب}{أ} = ١$.

«يُسْتَخدم (الواحد الصحيح) للدلالة على اليقين».

٤- إذا كانت (أ) تستلزم لا - ب، كانت $\frac{ب}{أ}$ = صفر.

«ويُسْتَخدم (الصفر) للتعبير عن الاستحالة».

---

(1) Ibid., P. 362.

(2) Ibid., P. 362.

(3) Ibid., P. 363.

وأيضا: محمد باقر الصدر، ص ص ١٤٨ - ١٤٩.

٥- إن درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفتي (ب)، (جـ) معاً هي درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (ب)، مضروبة في درجة احتمال أن تتصف (أ ب) بصفة (جـ).

«وهذه البديهية تُعْرَف باسم (بديهية الاتصال)».

٦- إن درجة احتمال أن تتصف (أ) بواحدة على الأقل من صفتي «ب» و«جـ» هي درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (ب) وحدها، مضافاً إليها درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (جـ) وحدها، مطروحاً من ذلك درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفتي (ب) و(جـ) معاً.

هذه هي البديهيات الست التي تُشْتَق منها نظرية الاحتمال، وعلى هذا الأساس يجب أن يُلاَحظ عند تفسير الاحتمال أن يعطي مفهوماً تصدق عليه تلك البديهيات، أي يجب أن يكون لاحتمال (ب) على افتراض (أ) معنى يفرض أن يكون لهذا الاحتمال قيمة واحدة لا أكثر تحقيقاً للبديهية الأولى، ويسمح بأن يحصل هذا الاحتمال على أية قيمة ابتداء من الصفر وانتهاء بالواحد الصحيح تحقيقا للبديهية الثانية، ويتطلب أن تكون درجة الاحتمال مساوية للواحد الصحيح في حالة لزوم (ب) عن (أ)، وتكون درجة الاحتمال مساوية للصفر في حالة لزوم لا - ب عن (أ). وذلك تحقيقاً للبديهية الثالثة والرابعة[١]. أما البديهية الخامسة (بديهية الاتصال) والسادسة (بديهية الانفصال) فسنعود إلى شرحهما بعد أن نعرض بشكل مبّسط الأسس المتضمنة في حساب الاحتمالات.

حساب الاحتمالات

توضح بديهيات نظرية الاحتمال أن القضية الاحتمالية ليست قضية يقينية كما أنها ليست مستحيلة، وإنما تقف بين اليقين والاستحالة، فإذا قلنا أن الحادثة «هـ «من الممكن أن تحدث، فهذا معناه أن هناك أسباباً ترجح حدوثها، وأن هذه الأسباب أقوى من الأسباب التي ترجح عدم حدوثها[٢]. ولكي نتمكن من قياس درجة وقوع حادثة ما، فإنه يجب علينا

(١) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ١٥٠.

(2) Stebbing, L. S., A Modern Introduction to Logic, 4 th., edition, Methuen & C., LTD., London, 1945, P. 364.

أن نحصي عدد الحالات المواتية والحالات غير المواتية التي تساعد أو تعوق وقوع الحادثة المذكورة[١]. وتتفاوت درجة احتمالها بين الصفر والواحد، أي بين الاستحالة واليقين. وعلى ذلك يتضح أن نظرية الاحتمال تستبعد النظرة الذاتية، وتجعل درجة الاحتمال أمراً موضوعياً خارجاً عن ذات الإنسان الذي يقوم بقياسها. فليس الاحتمال بهذا المعنى أمر عقيدة شخصية لا سند له إلا ما نظنه صوابا، بل القضية الدالة على احتمال هى تعبير عن العلاقة بين قضيتين[٢]. فإذا كانت العلاقة لزوماً ضرورياً كانت العلاقة بينهما درجة احتمالها واحدًا صحيحًا، وإذا كانت العلاقة بينهما تناقضاً كانت درجة الاحتمال صفراً، وإذا كانت لعلاقة بينهما هى بين هذين الطرفين، احتاج الأمر إلى عمليات رياضية لقياس درجة الاحتمال[٣].

ولتوضيح كيفية قياس درجة الاحتمال، نأخذ المشكلة المألوفة وهى زهرة اللعب (النرد) إذ إن العوامل المتضمنة فيها بسيطة ويمكن حسابها بسهولة[٤]:

١- ما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ إذا ألقينا زهرة لعب واحدة؟ إنه من الواضح أن هناك ستة طرق لوقوع زهرة اللعب، وإنها يجب أن تقع بطريقة من هذه الطرق الستة بحيث تستقر الزهرة عند أي وجه من وجوهها الستة.

إذن احتمال ظهور الرقم ٦ إلى أعلى إذا ألقينا زهرة لعب واحدة هو $\frac{١}{٦}$.

٢- ما هو احتمال ألا يظهر الرقم ٦ إلى أعلى إذا ألقينا زهرة واحدة؟ الاحتمال هو $\frac{٥}{٦}$.

٣- إذا ألقينا بزهرتين فما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ في الزهرتين معاً؟

بما أن لكل زهرة ستة أوجه، وبما أن أياً من هذه الأوجه قد يظهر مع أي وجه من

---

(1) Ibid., P. 364.

(٢) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢ ص ص ٣٤٣ - ٣٤٤.

(٣) المرجع السابق، ص ٣٤٤.

(٤) اعتمدنا في عرض هذا الموضوع على:

Stebbing, L.S., A Modern Introduction to Logic, PP. 364 - 368.

الأوجه الستة للزهرة الأخرى، فإنه من الواضح أن هناك ٣٦ اقتراناً ممكناً. إذن فالاحتمال المطلوب هو $\frac{١}{٣٦}$.

إنه من الواضح أن الحصول على الرقم ٦ في واحدة من قطعتي الزهر ليس معتمداً على احتمال الحصول على الرقم ٦ في الزهرة الأخرى. وهذه الأحداث تسمى أحداثاً مستقلة. واحتمال أن كليهما سوف يحدث إنما هو اقتران بين الاحتمالات المستقلة لكل منهما، أي:

$$\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣٦}.$$

وهكذا نحصل على الاحتمال الاقتراني بين حادثتين أو أكثر من الحوادث المستقلة بضرب احتمالاتها المنفصلة.

٤- ما هو احتمال ألا يظهر الرقم ٦ في أية من الزهرتين إذا ألقيتا معاً؟

هذان الحدثان مستقلان. وعلى ذلك فإن احتمال عدم الحصول على الرقم ٦ في كل منهما على حده هو $\frac{٥}{٦}$. إذن الاحتمال المطلوب هو $(\frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}) = \frac{٢٥}{٣٦}$.

٥- ما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ في زهرة واحدة فقط، إذا أُلقِيَت الزهرتان معاً؟

لا يهمنا في هذه الحالة أن نبحث ما إذا كان الرقم ٦ سيظهر في الزهرة الأولى أو الثانية، ونستطيع أن نشير إلى الحالة التي يظهر فيها الرقم ٦ بالرمز (س ١ أو س ٢)، والحالة التي لا يظهر فيها الرقم ٦ بالرمز (ص ١ أو ص ٢).

وهكذا فنحن نتطلب إما س١ ص١ أو س٢ ص٢. ولقد عرفنا أن احتمال «س» هو $\frac{١}{٦}$ وان احتمال «ص» هو $\frac{٥}{٦}$.

إذن فاحتمال س ١ ص١ هو $(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦})$

واحتمال س ٢ ص ٢ هو أيضاً $(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦})$.

إذن فاحتمال س١ ص١ أو س٢ ص٢ هو:

$$(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}) + (\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}) = (\frac{٥}{٣٦} + \frac{٥}{٣٦}) = \frac{١٠}{٣٦}.$$

إن الحادثتين س١ ص١ وس٢ ص٢ حدثان استبعاديان Exclusive أو تبادليان Alternative. إذن فاحتمال انفصالهما هو مجموع احتمالهما المنفصلين، وهو $\frac{١٠}{٣٦}$.

٦- ما هو احتمال أن زهرة واحدة على الأقل سيظهر فيها الرقم ٦ إذا ألقيتا معاً؟

بما أننا في هذه الحالة لا نستبعد كليهما، فإن الحالة الوحيدة المستبعدة هي «لا هذه ولا تلك». إذن فالاحتمال المطلوب يكافئ مجموع:

١- كليهما. ٢- واحد منهما فقط. ٣- الآخر.

أي:

$$(\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦}) + (\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}) + (\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}) = \frac{١١}{٣٦}$$

وينبغي ملاحظة أن احتمال الحصول على الرقم ٦ في زهرة واحدة على الأقل، واحتمال عدم الحصول عليه في كل من الزهرتين يستنفد الحالات الممكنة، إذن فعلينا أن نأخذ واحدة من الحالتين أو الأخرى، فيكون مجموع الحالتين مساوياً للواحد الصحيح، وهذه الاحتمالات المنفصلة تكافئ $\frac{١١}{٣٦}$ و$\frac{٢٥}{٣٦}$.

وينتج عن هذا أن:

$$\frac{١١}{٣٦} + \frac{٢٥}{٣٦} = \frac{٣٦}{٣٦} = ١$$

إن وقوع حدث معين أو عدم وقوعه يستنفدان كل الاحتمالات. ويمكن التعبير عن هذا بالصيغة الآتية:

$$\text{هـ} + \overline{\text{هـ}} = ١.$$

وهكذا نرى مرة أخرى (بواسطة مبدأ الوسط المرفوع) أن احتمال الحوادث الاستبعادية هو جمع منطقي. ويمكن تطبيق صيغ «دي مورجان» إذا كتبنا (أ) للتعبير عن احتمال أن (أ) سوف يحدث، و(ب) للتعبير عن أن (ب) سوف تحدث، إذن (أ ب) تشير إلى احتمال أن كليهما سيحدثان، أ + ب تشير إلى احتمال أن واحداً منهما أو الآخر سوف لا يحدث، إذن فلدينا:

١- $\overline{(\text{أ} + \text{ب})} = \text{أَ}\ \text{بَ}$

٢- $\overline{(\text{أ}\ \ \text{ب})} = \text{أَ} + \text{بَ}$

وهذا يعبر عن أن:

١- احتمال أن لا - أ أو لا - ب سوف يحدثان يكافئ حاصل احتمال أن (أ) سوف لا تحدث واحتمال أن (ب) سوف لا تحدث.

٢- احتمال أن ليس كل من (أ) و(ب) سوف يحدثان يكافئ مجموع الاحتمالين القائلين بأن (أ) سوف لا يحدث و(ب) سوف لا يحدث.

وترى سوزان استيبنج Stebbing أن صيغ «دي مورجان «يمكن تطويرها لتغطي حالات أياً كانت درجة تعقيدها، وكذلك يمكن تطبيق القوانين السابقة حتى تغطي الحالات التي تتضمن أكثر من عاملين أثنين. كما تشير استيبنج إلى أنه في عمليات حساب الاحتمالات يجب أن نعتني عناية فائقة بتحديد ما إذا كانت الحوادث مستقلة أو تابعة أو استبعادية. إن المبدأ الأساسي واحد سواء كانت الحوادث تابعة أو استبعادية. ولكن إذا كانت الحوادث مستقلة، فحينئذ تكون كل الاحتمالات عرضة لأن تحدث في كل حالة. وعلى سبيل المثال، يكون احتمال الحصول على «الصورة» في قطعة العملة هو $\frac{١}{٢}$، ويبقى هذا الاحتمال ثابتاً، ولا ينال منه كثرة ظهور «الكتابة»، إلا إذا كنا نحسب احتمال ظهور عدد معين من «الصورة» في عدد محدود من الرميات. وإذا كان حدث ما معتمداً على آخر غيره، فحينئذ يُحْسَب احتماله فقط بعد حساب احتمال الحدث المستقل. وهذا يعني أنه في حالة الحوادث التابعة نكون بإزاء شروط أولية مختلفة.

لقد أصبح من المعتاد أن نحدد صيغاً معينة لحساب احتمال أن حدثاً مثل «هـ» سيتكرر حدوثه مرة أخرى. ونستطيع أن نميز حالتين:

١- احتمال أن يتكرر حدوث «هـ» مرة واحدة إضافية.

٢- احتمال أن يتكرر حدوث «هـ» بمقدار «ن» من المرات.

ويمكن أن نقسم كلاً من هاتين الحالتين طبقاً لما يلي:

أ- إننا لم نعلم أن «هـ» سيتخلف عن الحدوث.

ب- إننا علمنا أن «هـ» سيتخلف عن الحدوث.

١- أ: إذا علمنا أن «هـ» قد حدث مرات قدرها «م» ولم نعلم أنه تخلف، فحينئذ نعبر عن نسبة الحالات المواتية إلى العدد الكلي للحالات الماضية بالكسر $\frac{م}{م} = ١$ (أي حالة اليقين).

وعلى فرض أن احتمال وقوع «هـ» مساو لاحتمال عدم وقوعها، فعندئذ تكون درجة الاحتمال هى $\frac{١}{٢}$، لكنها إذا حدثت مرة، زادت نسبة احتمال وقوعها في المرة الثانية، وأصبحت درجةالاحتمال كالاتي:

$$\frac{م + ١}{م + ٢} = \frac{٢}{٣}$$

١- ب: وباستخدام «م» كما استخدمناها من قبل، فإن احتمال أن تحدث «هـ» مرات أكثر عددها «ن» هو:

$$\frac{م + ١}{م + ن + ١}$$

٢- أ: باستخدام «م» كما سبق، وبالتعبير عن عدد المرات التي علمنا أن «هـ» سيتخلف فيها بالرمز «م» وهى تساوي لاَ - م، نعبر عن الاحتمال المطلوب بالكسر الآتي:

$$\frac{م + ١}{م + مَ + ن}$$

٢- ب: باستخدام (م + مَ + ن) كما سبق، فإننا نعرف بيسر أن الاحتمال المطلوب يعبر عنه بالكسر الآتي:

$$\frac{م + ١}{م + مَ + ن + ١}$$

وتؤدي بنا ملاحظة هذه الصيغ إلى:

١- كلما كبرت «م» اقتربت قيمة الكسر من الواحد الصحيح، وبالتالي يزداد احتمال حدوث «هـ».

٢- كلما كبرت (مَ أو ن)، قل احتمال حدوث «هـ»، ونعرف الصيغة $\frac{م + ١}{م + ن}$ بقانون التتابع لـ «لابلاس» الذي يعتمد على «إمكانية التساوي» للحالات التي لدينا. ولا يمكن البرهنة على صحة إمكانية التساوي إلا إذا كانت البدائل الممكنة متساوية القيمة.

قياس الاحتمال في الحوادث المركبة وفقاً للبديهية الخامسة

المراد هنا هو قياس احتمال أن يكون شيء ما (أ) موصوفاً بصفتين في آن واحد هما «ب» و«جـ». وقياس درجة الاحتمال في هذه الحالة يجري على أساس «البديهية الخامسة» من بديهيات نظرية الاحتمال - سبق أن ذكرناها - والتي تسمى باسم «بديهية الاتصال»[1]، وهى تتيح الفرصة للقول بأن الحادثتين ستقعان معاً. فعلى سبيل المثال:

إذا سحبت ورقتين من أوراق اللعب، فما هو احتمال أن تكون الورقتان حمراوين؟

في هذه الحالة نجد أن (أ) تمثل المعطى الذي يقول (أن ورق اللعب يتكون من ٢٦ ورقة حمراء و٢٦ ورقة سوداء).

أما (ب) فهى تمثل العبارة القائلة: «إن الورقة الأولى حمراء»، في حين أن (جـ) تمثل العبارة القائلة: «أن الورقة الثانية حمراء».

---

(١) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢، ص ٣٤٦.

إذن $\frac{ب \times جـ}{أ}$ تمثل درجة احتمال أن كلتيهما حمراء.

و $\frac{ب}{أ}$ تمثل درجة احتمال أن الورقة الأولى حمراء وهى تساوي $\frac{١}{٢}$

و $\frac{جـ}{ب \times ١}$ تمثل درجة احتمال أن الورقة الثانية حمراء على فرض تحقق أن الورقة الأولى حمراء. وهي تساوي $\frac{٢٥}{٥١}$ (لأنه سيتبقى لنا بعد سحب الورقة الأولى ٥١ ورقة من بينها ٢٥ ورقة حمراء)[1].

وهكذا فإن درجة احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان حمراوين معاً هي:

$$\frac{١}{٢} \times \frac{٢٥}{٥١} = \frac{٢٥}{١٠٢}$$

وهناك صبغة رمزية للبديهية الخامسة، وهى:

ح (أ - ب جـ) = ح (أ - ب) × ح (أ ب - جـ)[2].

فإذا أردنا مثلاً أن نستخرج درجة احتمال أن يكون الطالب متفوقاً في اللغة الإنجليزية والرياضة معاً، وجب أن نحسب درجة احتمال تفوقه في اللغة الإنجليزية وحدها. ثم نضرب ذلك في درجة احتمال تفوقه في الرياضة على أساس أنه متفوق في الإنجليزية.

ومن الملاحظ أننا نخطئ الحساب لو جعلنا:

ح (أ - ب جـ) = ح (أ - ب) × ح (أ - جـ).

أي أننا نخطئ الحساب في المثال السابق لو ضربنا درجة احتمال تفوق الطالب في اللغة الإنجليزية في درجة تفوقه في الرياضة، لأن ذلك قد يفّوت علينا الاحتمال بأن يكون التفوق

---

(1) Russell, B., Human Knowledge , P. 364.

وأيضا د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، جـ ٢، ص ص ٣٤٨ - ٣٤٩.

(2) Kneale, W., Probability & Induction, P. 126.

نقلا عن: د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢، ص ٣٤٦.

في اللغة الإنجليزية هو نفسه عاملاً يؤثر في درجة الامتياز في الرياضة، ولذلك ينبغي - بعد حساب التفوق في اللغة الإنجليزية- أن نضرب هذا في درجة احتمال التفوق في الرياضة في هذه الحالة الخاصة التي ظهر فيها تفوق في اللغة الإنجليزية لا في حالة التفوق في الرياضة مطلقة من غير قيد[1].

فإذا كانت درجة الاحتمال في الحالة الأولى وحدها هي: $\frac{١}{ن}$، ودرجة الاحتمال في الحالة الثانية - على فرض تحقق الحالة الأولى - هي $\frac{١}{م}$، فإن درجة احتمال اجتماع الحالتين معاً هي $\frac{١}{م \times ن}$ [2].

مثال آخر. وعاءان في كل واحد منهما ثلاث كرات: أثنتان بيضاوان وواحدة سوداء، فما درجة احتمال أن تُسْحَب السوداوين في وقت واحد؟

قد يخيل إلينا للوهلة الأولى أن هناك أربع احتمالات، هي:

ب ب، ب س، س ب، س س (حيث ب = أبيض، س = أسود) لكن في ذلك الحساب تجاهلاً للقيمة الاحتمالية للأبيض بالنسبة للأسود ويجعلهما متساويتين، مع أن القيمة الاحتمالية للأبيض أكبر من القيمة الاحتمالية للأسود، ويجب مراعاة ذلك - كما أسلفنا - عند حساب درجة الاحتمال، ولشرح ذلك نقول[3]:

نرمز لكرات الوعاء الأول بالرمز:

ب ١، ب ٢، س ١.

ونرمز لكرات الوعاء الثاني بالرموز:

ب ٣، ب ٤، س ٢

(١) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢، ص ص ٣٤٦ - ٣٤٧.

(٢) المرجع السابق، ص ٣٤٧.

(3) Welton and Monahan, Intermediate Logic, P. 427.

فيكون احتمال السحب من الوعاء الأول هو:

أ إما أن تكون ب١، ب ٢، س١

واحتمال السحب من الوعاء الثاني هو:

أَ إما أن تكون ب٣ أو ب٤ أو س٢

واحتمالات الجمع بين أَ، أ معاً هي:

ب١ ب٣، ب١ ب٤، ب١ س٢، ب٢ ب٣، ب٢ ب٤، ب٣ س٣، س١ ب٤، س١ ب٤، س١ س٢.

وهي تسع حالات، فيهما الأسودان معاً مرة واحدة، وإذن فاحتمال سحبهما معاً هو $\frac{١}{٩}$.

وهذه النتيجة تتفق مع بديهية الاتصال التي شرحناها، لأن احتمال الأسود في الحالة الأولى هو $\frac{١}{٣}$، وفي الحالة الثانية هو $\frac{١}{٣}$، وإذن يكون احتمالهما معاً هو $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٩}$.

قياس الاحتمال في الحوادث المركبة وفقاً للبديهية السادسة

المراد هنا هو قياس درجة احتمال أن يكون شيء ما (أ) موصوفاً بواحدة على الأقل من صفتي (ب) و(جـ).

وقياس درجة الاحتمال في هذه الحالة يجري على أساس «البديهية السادسة» من بديهيات نظرية الاحتمال، والتي تسمى باسم «بديهية الانفصال» - سبق أن أشرنا إليها - والصورة الرمزية لهذه البديهية هي كالآتي:

ح (أ - ب ٧ جـ) = ح (أ - ب) + ح (أ - جـ) - ح (أ - ب جـ)[1].

(1) Kneale, W., Probability & Induction, P. 125.

نقلا عن: د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢، ص ٣٥٠.

وتُقْرَأ الصيغة السابقة هكذا: إن درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة إما بصفة (ب) أو بصفة (جـ)، تساوي درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة بصفة (ب) مضافاً إليها درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة بصفتي (ب) و(جـ) معاً[١].

ولشرح هذا الجزء الأخير من بديهية الانفصال، نقول:

إذا افترضنا أن حالتي ب، جـ متضادتان، أي أنهما لا تجتمعان معاً، مثال ذلك أن تكون لديك تذكرتان في نصيب، ولابد أن تكون الرابحة إحداهما فقط، إذ لا يربح في النصيب إلا تذكرة واحدة، فها هنا يكون احتمال ربحك بتذكرة ب أو بتذكرة جـ هو:

ح (أ - ب) + ح (أ - جـ).

لكن قد تكون حالتان ب، جـ مما يمكن اجتماعهما معاً، مثال ذلك أن ورقة اللعب قد تتصف بصفتين في آن واحد، فتكون - مثلاً - سبعة وتكون حمراء، ونريد أن نحسب درجة احتمال سحب ورقة تكون فيها إحدى الصفتين على الأقل، فعندئذ لا يكفي في قياس درجة الاحتمال أن نجمع احتمال أن تكون الورقة المسحوبة سبعة، إلى احتمال أن تكون الورقة المسحوبة حمراء، لأن احتمال أن تكون الورقة المسحوبة سبعة يدخل فيه احتمال أن تكون حمراء كذلك، وأيضاً أن تكون الورقة المسحوبة حمراء يدخل فيه احتمال أن تكون سبعة كذلك، لذا لا يكفي لحساب احتمال إحدى الحالتين على الأقل مجرد جمع الاحتمالين، بل لابد أن نطرح من ذلك درجة احتمال اجتماعهما معاً[٢].

مثال: ما درجة احتمال أن نسحب ورقتين من أوراق اللعب فتكون إحداهما على الأقل حمراء[٣]؟

(عدد ورق اللعب ٥٢ ورقة، نصفه أحمر والنصف الآخر أسود)

---

(١) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢، ص ٣٥٠.

(٢) المرجع السابق، ص ص ٣٥٠ - ٣٥١.

(٣) المرجع السابق، ص ٣٥١، وأيضاً:

Russell, B., Human Knowledge. P. 364.

احتمال أن تكون الأولى حمراء هو $\frac{١}{٢}$.

احتمال أن تكون الثانية حمراء هو $\frac{١}{٢}$.

احتمال أن تكونا حمراوين معاً هو $\frac{٢٥}{١٠٢}$ (لقد أوضحنا هذه النتيجة في مسألة سابقة).

احتمال أن تكون إحداهما على الأقل حمراء، هو:

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} - \frac{٢٥}{١٠٢} = \frac{٧٧}{١٠٢}$$

مثال آخر:[١] وعاءان، الأول به ٨ كرات بيضاء وكرتان سوداوان، والثالث به ٦ كرات بيضاء وأربع كرات سوداء، فما درجة احتمال أن أسحب كرة من كل من الوعاءين، فأسحب كرة واحدة على الأقل بيضاء؟

احتمال سحب كرة بيضاء من الوعاء الأول هو $\frac{٨}{١٠}$.

واحتمال سحب كرة بيضاء من الوعاء الثاني هو $\frac{٦}{١٠}$.

واحتمال سحب كرتين بيضاوين معاً هو $\frac{٤٨}{١٠٠}$.

واحتمال سحب واحدة على الأقل بيضاء هو:

$$\frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} - \frac{٤٨}{١٠٠} = \frac{٩٢}{١٠٠}$$

ويتضح مما سبق أنه إذا كنا أمام احتمالات منفصلة لأية مجموعة محدودة من الحوادث، فإنه يمكننا - باستخدام البديهيتين الخامسة والسادسة - حساب درجة احتمال حدوث هذه الحوادث أو على الأقل درجة احتمال حدوث إحداها[٢].

---

(١) المرجع السابق، ص ٣٥٢.

(2) Russell, B., Human Knowledge, P. 364.

مبدأ الاحتمال العكسي

يرى «رسل»[1] أنه ينتج عن بديهية الاتصال أن:

$$\frac{\text{ب}}{\text{(جـ + أ)}} = \frac{\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{(ب + أ)}}}{\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}}$$

وهذا ما يسمى بمبدأ الاحتمال العكسي

ويمكن توضيح هذا المبدأ على النحو الآتي:

نفترض أن (ب) نظرية ما، و(جـ) معطيات تجريبية تلائمها.

إذن $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ تمثل درجة احتمال النظرية (ب) القائمة على ا لمعطيات (جـ) المعروفة لنا. وأن $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ تمثل درجة احتمال (جـ استناداً إلى المعطيات السابقة. وهكذا فإن درجة احتمال النظرية (ب) استناداً إلى المعطيات (جـ) التي تم التأكد منها، يمكن الحصول عليها بضرب الاحتمال السابق لـ (ب) في احتمال (جـ) بافتراض أن لدينا (ب) وقسمته على الاحتمال السابق لـ (جـ). وفي أقصى الحالات ستضمن النظرية ب جـ، لأن:

$$\frac{\text{جـ}}{\text{(ب + أ)}} = \text{أ}$$

وفي هذه الحالة نجد أن:

$$\frac{\text{ب}}{\text{(جـ + أ)}} = \frac{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}{\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}}$$

(1) Ibid., P. 364.

وهذا يعني أن المعطى الجديد (جـ) يزيد من درجة احتمال (ب). وبعبارة أخرى، إذا عرفنا وقوع حوادث معينة، وكانت هناك عدة فروض لتفسيرها، فالاحتمال العكسي هو الذي نقيس به درجة ترجيح فرض على آخر، معتمدين على الحوادث التي عرفناها، كما يتضح من المثال التالي:

لدينا وعاء به ثلاث كرات نجهل لونها، سحبنا كرة منها فوجدناها بيضاء، ثم أرجعناها إلى الوعاء، وسحبنا كرة أخرى فوجدناها سوداء، ثم أرجعناها إلى الوعاء. وبعدئذ أخذنا نكرر العملية، لكننا كلما سحبنا كرة وجدناها إما بيضاء أو سوداء.

وهنا نجد أنفسنا أمام أحد احتمالين:

الاحتمال الأول: أن تكون الكرات الثلاث مزيجاً من أبيض وأسود معاً.

الاحتمال الثاني: أن تكون هناك كرة ثالثة لونها مخالف للأبيض والأسود، لم تخرج أبداً في عمليات السحب.

فكيف نرجح فرضاً على فرض؟

لو فرضنا أن في الوعاء كرة لونها مخالف للأبيض والأسود، كان احتمال عدم سحبها في المرة الأولى هو $\frac{٢}{٣}$، وفي المرة الثانية $\frac{٤}{٩}$، وفي المرة الثالثة $\frac{٨}{٢٧}$، وفي المرة الرابعة $\frac{١٦}{٨١}$، ... واحتمال عدم سحبها في المرة الثامنة هو $\frac{٢٥٦}{٦٦٥١}$، وهى نسبة تكاد تبلغ $\frac{١}{٢٦}$، وهكذا تأخذ نسبة الاحتمال في النقصان كلما مضينا في السحب، مما يقلل من شأن الفرض الثاني، ويزيد من ترجيح الفرض الأول[١].

ولتوضيح فائدة مبدأ الاحتمال العكسي في حساب الاحتمالات نأخذ المثال الآتي:

إذا افترضنا خطاً مستقيماً مقسماً الى قسمين: (أ) و(ب). والمطلوب اطلاق النار على هدف موضوع على هذا الخط. ونحن لا نعلم ما إذا كان الهدف موضوعاً على (أ) أو على

---

(١) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢، ص ص ٣٥٥ - ٣٥٦.

(ب)، ولنفرض أن احتمال كونه موضوعا على (أ) هو $\frac{٣}{٤}$، واحتمال كونه موضوعاً على (ب) هو $\frac{١}{٤}$.

وعلى هذا الأساس وجهنا القذيفة إلى (أ)، وكان احتمال إصابة (أ) وفقاً لمحاولتنا هو $\frac{٣}{٤}$، واحتمال أن نخطئ في المحاولة ونصيب القذيفة (ب) هو $\frac{١}{٤}$، ولنفرض أنه قيل لنا بشكل مؤكد أننا أصبنا الهدف، فما هي درجة احتمال أن يكون الهدف موضوعا على (أ) بعد افتراض أننا قد أصبنا الهدف؟[1]

ولقد كانت درجة الاحتمال قبل توجيه الطلقة حسب ما افترضناه هي $\frac{٣}{٤}$، ولكنها سوف تزداد الآن. ومبدأ الاحتمال العكسي هو الذي يحدد لنا قيمة ذلك الاحتمال بعد افتراض اصابة الهدف، فإذا كنا نرمز إلى درجة الاحتمال بـ (د)، وإلى كون الهدف في (أ) بـ (جـ)، وإلى كون الهدف في (ب) بـ (س)، وإلى اصابة الهدف على تقدير كون الهدف في (أ) بـ (ط)، وإلى اصابة الهدف على تقدير كون الهدف في (ب) بـ (و) فسوف نحصل على المعادلة الآتية:

$$\frac{\text{د (جـ)} \times \text{د (ط)}}{\text{د (جـ)} \times \text{د (ط)} + \text{د (س)} \times \text{د (و)}} = \text{د (جـ) بعد إصابة الهدف}$$[2].

وإذا بدلنا الرموز بالأرقام، وافترضنا قيم الاحتمال كما تقدم في المثال، كانت المعادلة كما يلي:

$$\frac{\frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤}}{\frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}} = \frac{\frac{٩}{١٦}}{\frac{١٠}{١٦}}$$

أي أن درجة احتمال كون الهدف موضوعاً على (أ) هي قبل الإصابة $\frac{٣}{٤}$ وبعد إصابة الهدف زادت فأصبحت $\frac{٩}{١٠}$.

---

(١) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ص ١٥٦ - ١٥٧.

(٢) المرجع السابق، ص ١٥٧.

ويمكن فهم مبدأ الاحتمال العكسي بواقعة اكتشاف كوكب نبتون باعتبار أن اكتشاف هذا الكوكب زاد من احتمال صدق نظرية الجاذبية. وفي هذه الحالة ستكون:

ب = نظرية الجاذبية.

أ = كل الوقائع التجريبية المعروفة قبل اكتشاف كوكب نبتون.

جـ = واقعة وجود كوكب نبتون في موضع معين[١].

وباستخدام المثال السابق - الخاص باطلاق قذيفة على هدف موضوع على خط مستقيم - نقول إن نظرية الجاذبية يمثلها الهدف الموضوع على (أ)، واكتشاف كوكب نبتون يمثله العلم بأن الهدف قد أصيب عند توجيه القذيفة، فكلما زادت درجة احتمال كون الهدف موضوعاً على (أ) بعد اكتشاف أن الهدف قد أصيب مع محاولة الرامي لتوجيه الطلقة إلى (أ)، تزيد بالتالي درجة احتمال صدق نظرية الجاذبية بعد اكتشاف نبتون[٢].

ولمبدأ الاحتمال العكسي أهمية كبرى في تبرير الاستدلال الاستقرائي، لأننا في هذا الاستدلال نحكم على كل أفراد النوع بما شاهدناه في بعض الأفراد، فمثلاً نشاهد بعض الغربان ونجدها سوداء، فنعمم الحكم قائلين: إن كل غراب أسود. فعلى أي أساس اعتمدنا في تعميم هذا الحكم، مع أن هنالك احتمالاً بأن تكون الغربان التي لم نرها ليست سوداء؟ إننا نعمم هذا الحكم على أساس مبدأ الاحتمال العكسي[٣].

مبرهنة بايز

يقول «رسل»[٤] في فصل بعنوان «الاحتمال الرياضي» من كتابه «المعرفة البشرية»: إن هناك قضية على جانب كبير من الأهمية تسمى أحياناً باسم (مبرهنة بايز) Bayes's، ويوضحها «رسل»على النحو الآتي:

---

(1) Russell, B., Human Knowledge, P. 365.

(٢) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ١٥٧.

(٣) د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج ٢ ص ٣٥٦.

(4) Russel. , B., Human Knowledge, P. 365.

لنفرض أن ع١، ع٢، .... عن ممكنات تخارجية Exclusive Possibilities. و إننا نعلم أن إحدى هذه الممكنات صادقة، ولنفترض أن (ك) معطيات عامة. وأن (هـ) واقعة مواتية. ونريد أن نعرف درجة احتمال إحدى الممكنات (عَ) إذا كانت لدينا (هـ).

إن احتمال (عَ) قبل أن تكون لدينا (هـ)، وأيضاً احتمال (هـ) إذا كانت لدينا (عَ) تمثله المعادلة الآتية:

$$\frac{\frac{\text{عَ}}{\text{ك}} \cdot \frac{\text{هـ}}{(\text{عَ} + \text{ك})}}{\sum_{١}^{\text{ن}} \frac{\text{هـ}}{\text{ع١} + \text{ك}} \cdot \frac{\text{عَ}}{\text{ك}}} \times \frac{\text{عَ}}{\text{هـ} + \text{ك}}$$

هذه المعادلة تمكّننا - على سبيل المثال - من حل المشكلة الآتية[1]:

إذا افترضنا أن لدينا ثلاث حقائب تحتوي كل منها على خمس كرات، غير أنها تختلف في عدد ما تحتويه من الكرات البيضاء، فواحدة منها تحتوي على ثلاث كرات بيضاء فقط، والأخرى على أربعة كرات بيضاء فقط، والثالثة لا تشتمل إلا على الكرات البيضاء. ولنفرض أنّنا أخذنا حقيبة من تلك الحقائب الثلاث عشوائياً، أي لا ندري ما إذا كانت الأولى أو الثانية أو الثالثة، ثم سحبنا من الحقيبة المختارة ثلاث كرات، فاتُّفِقَ أنها بيضاء. فما هو احتمال أن تكون هذه الحقيبة التي اخترناها عشوائياً هى الحقيبة الثالثة التي لا تحتوى إلا على كرات بيضاء فقط؟

إننا إذا رمزنا بـ (د) إلى درجة الاحتمال، وبـ (جـ) إلى كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة الثالثة التي تحتوي على الكرات البيضاء فقط، وبـ (ط) إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير (جـ)، وبـ (س) إلى كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة الأولى التي لا تحتوى إلا على ثلاث كرات بيضاء وبـ (و) إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير (س)، وبـ (ك) إلى كون أن الحقيبة المختارة هى الحقيبة الثانية التي تحتوي على أربع كرات بيضاء، وبـ (هـ)

(١) محمد باقر الصدر، الأسس المنطقية للاستقراء، ص ص ١٥٧ - ١٥٨.

إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير (ك).

باستخدام هذه الرموز نحصل على المعادلة الآتية:

$$\text{د (جـ)} = \frac{\text{د (جـ) × د (ط)}}{\text{د (جـ) × د (ط) + د (س) × د (و) + د (ك) × و (هـ)}}$$

وبالتعويض عن الرموز بالأرقام تكون المعادلة كما يلي:

احتمال أن تكون هذه الحقيبة هي الثالثة التي تحتوى على كرات بيضاء فقط يساوي:

$$\frac{\frac{١}{٣} \times ١}{\frac{١}{٣} \times ١ + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٤}{١٠}} = \frac{\frac{١}{٣}}{\frac{١}{٢}}$$

أي أن احتمال كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة التي تحتوى على كرات بيضاء فقط هو $\frac{٢}{٣}$ وهذه المشكلة لها أهمية تاريخية تتعلق ببرهان لابلاس Laplace الخاص بالاستقراء[1].

(1) Russell, B., Human Knowledge, P. 365.

تحليل الأحكام الاحتمالية بأساليب المنطق الرمزي

إن المنطق يحتاج، أكثر من أي مبحث آخر في الفلسفة، إلى معالجة فنية متخصصة لمشكلاته، فالمشكلات المنطقية لا تُحَل بلغة مجازية، وإنما تقتضي دقة الصياغة، بل إن مجرد التعبير عن المشكلة يكون في كثير من الأحيان مستحيلاً بدون مساعدة لغة تماثل في دقتها لغة الرياضيات، ولقد أصبح تكوين المنطق الرمزي سمة من أبرز سمات الفلسفة العلمية. فهذا المنطق، الذي كان في الأصل شفرة سرية لا تفهمها إلا جماعة صغيرة من الرياضيين، قد أخذ يجذب إنتباه دارسي الفلسفة على نحو متزايد، ومن هنا يطالب ريشنباخ بالتوسع في مناهج المنطق الرمزي، فيقول: «إن البحث في مفهوم الاحتمال يبدأ بتحليل البنية المنطقية للأحكام الاحتمالية»، وهذه المسألة - في رأي ريشنباخ- «لم تنل القدر الكافي من الاهتمام حتى الآن، فهي تتطلب حلاً دقيقاً على ضوء المناهج الرمزية، حيث إن المنطق الرمزي قد ابتكر من الوسائل ما يمكّنه من وصف الصورة المنطقية للقضية بغض النظر عن مضمونها». ولذا يطالب ريشنباخ بضرورة «التوسع في هذه المناهج بحيث تتضمن وصفاً للأحكام الاحتمالية، حيث إن أحد الأهداف الأولى لفلسفة الاحتمال هو صياغة الحكم الاحتمالي»[1].

وقبل أن نعرض نسق المنطق الثلاثي القيم عند ريشنباخ، نود أن نشير بإيجاز إلى قواعد المنطق الرمزي أو اللوجسطيقا Logistic، حيث يرى ريشنباخ إن أسلوب المنطق الرمزي هو الأسلوب الأكثر دقة الذي يمكن بواسطته عرض نسق المنطق الثلاثي القيم. ويتم توضيح بنية المنطق التقليدي (الثنائي القيم) بواسطة قوائم الصدق truth tables التي تحدد قيم الصدق الناشئة عن الإجراءات الخاصة بالقضايا، أو ما يطلق عليه ريشنباخ اسم «الإجراءات القضائية» Propositional Operations بوصفها دالات functions للقضايا الأولية. وأهم هذه الإجراءات القضائية: «لا»، «أو»، «و»، «يلزم عنه»، «يكافئ». ويرى ريشنباخ أن بعض هذه التعبيرات قد تُسْتَخدم في اللغة الجارية، لا للربط بين القضايا، وإنما لربط الألفاظ بعضها ببعض، كالقول بأن «زيداً أوعمراً هو الذي سيذهب معك». غير أن

---

(1) Reichenbach, H., The Theory of Probability - An Inquiry into The Logical & Mathematical Foundations of the Calculus of Probability, P.45.

ريشنباخ ينظر إلى هذه القضية على أنها صيغة مختصرة للقضية القائلة «سيصحبك زيد أو سيصحبك عمر»[١].

وعن إجراء النفي يقول ريشنباخ إنه يختلف عن الإجراءات الأخرى من حيث إنه لا يمكن تطبيقه إلا على قضية واحدة فحسب، فهو إجراء أحادي في حين أن الإجراءات الأخرى ثنائية إذ تربط بين قضيتين. وللتعبير عن المتغيرات القضائية يستخدم ريشنباخ الحروف: «ق»، «ل»، .... إلخ.

وبالنسبة للإجراءات المنطقية - التي سبق أن ذكرناها - يستخدم ريشنباخ التدوين التالي، واضعاً بجانبه اسم الإجراء المنطقي الخاص به[٢].

~ ق	لا ق	نفي
ق ∨ ل	ق أو ل	فصل، جمع منطقي
ق . ل	ق و ل	عطف، ضرب منطقي
ق ⊃ ل	ق يلزم عنها ل	لزوم
ق ≡ ل	ق تكافئ ل	تكافؤ

وتوضح قائمتا الصدق رقمي (١)، (٢) قيم صدق المنطق الثنائي القيم.

قائمة رقم (١)

ق	النفـــي ~ ق
ص	ك
ك	ص

(1) Reichenbach, H., Elements of Symbolic Logic, P. 23.
(2) Ibid., P. 23.

قائمة رقم (٢)

ق	ل	فصل ق v ل	عطف ق . ل	لزوم ق ⊃ ل	تكافؤ ق ≡ ل
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ص	ك
ك	ك	ك	ك	ص	ص

إن هذه القوائم يمكن قراءتها من الجهتين: ابتداء من القضايا الأولية وانتهاء بالروابط القضائية، أو العكس: ابتداء من الروابط القضائية وانتهاء بالقضايا الأولية. فبالنسبة للرابطة «أو» مثلا، إذا بدأنا من الاتجاه الأول، سنجد أن قوائم الصدق تقول: «إذا كانت القضية «ق» صادقة، والقضية «ل» صادقة، فإن الدالة الانفصالية (ق v ل) تكون صادقة»، أما إذا بدأنا من الاتجاه الثاني، فسنجد أن قوائم الصدق تقول: «إذا كانت الدالة الانفصالية (ق v ل) صادقة فإن «ق» تكون صادقة، و«ل» تكون صادقة، أو أن «ق» تكون صادقة و«ل» تكون كاذبة، أو أن «ق» تكون كاذبة و«ل» تكون صادقة»[1]. وهذا الفصل الذي يسمح بالجمع بين صدق «ق» وصدق «ل» معاً، يسمى «الفصل الضعيف». ويوجد نوع آخر من الفصل هو «الفصل القوي»، وعلاقة الفصل القوي بين قضيتين تعبر عن قانون الثالث المرفوع، إما «ق» أو «ل» ولا ثالث لهما[2]. وعلى ذلك فالفصل بمعناه القوي لا يصدق إلا في حالة صدق أحد البديلين وكذب الآخر، وهذا ما تظهره قائمة الصدق التالية:

(1) Reichenbach, H., Philosophic Foundations of Quantum Mechanics, P. 148.

(٢) د. نازلي إسماعيل حسين، مبادئ المنطق الرمزي، ص ٢١٤.

قائمة رقم (٢)

ق	ل	ق v ل
ص	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

وكأن بين البديلين تناقضاً بحيث أنهما لا يصدقان معاً ولا يكذبان معاً[١].

ويميز ريشنباخ بين قضايا تحصيل الحاصل والقضايا التركيبية والقضايا المتناقضة. فإذا كانت صيغة منطقية معينة صادقة بالنسبة لجميع قيم صدق القضايا الأولية، فإن مثل هذه الصيغة تسمى تحصيل حاصل. وتتسم صيغ تحصيل الحاصل بأنها ضرورية الصدق وفارغة Empty أي لا تنبئنا بشيء. وهذه السمة لا تعني أن صيغ تحصيل الحاصل عديمة القيمة، بل على العكس فإن قيمتها متضمنة في كونها ضرورية وفارغة. ويؤكد ريشنباخ على أنه يمكن على الدوام إضافة تحصيل الحاصل إلى القضايا الفيزيائية، شريطة ألا تضيف هذه الصياغات مضموناً تجريبياً إلى القضايا الفيزيائية. وعلينا أن نستعين بصياغات تحصيل الحاصل إذا أردنا التوصل إلى بعض النتائج من القضايا الفيزيائية. وعلى ذلك فإن إقامة تحصيلات حاصل محكمة تكشف لعالِم الفيزياء عن أداة استنتاجية قوية، وينبغي النظر إلى الرياضيات بوصفها أداة من هذا النوع. وتقدم الصياغات التالية أمثلة لتحصيلات الحاصل البسيطة[٢].

١- قانون الهوية ق ≡ ق

٢- قاعدة النفي المزدوج ~ ~ ق ≡ ق

٣- الوسط المرفوع ق v ~ ق

(١) د. محمد مهران، مقدمة للمنطق الرمزي، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، ١٩٨٥، ص ١١٦.
(2) Reichenbach, H., Philosophic Foundations of Quantum.

٤- قانون التناقض ق . ~ ق

٥- قانونا دي مورجان ~ (ق . ل) ≡ ~ ق ∨ ~ ل

٦- ~ (ق ∨ ل) ≡ ~ ق . ~ ل

٧- القاعدة الأولى للاستغراق ق . (ل ∨ م) ≡ (ق . ل) ∨ (ق . م)

٨- القاعدة الثانية للاستغراق ق ∨ (ل . م) ≡ (ق ∨ ل) . (ق ∨ م)

٩- قاعدة عكس النقيض (~ ق ⊂ ل) ≡ (~ ل ⊂ ق)

١٠- انحلال التكافؤ (ق ≡ ل) ≡ (ق ⊂ ل) . (ل ⊂ ق)

١١- انحلال اللزوم ق ⊂ ل ≡ ~ ق ∨ ل

١٢- برهان الخلف (ق ⊂ ~ ق) ⊂ ~ ق

هذا عن صيغة تحصيل الحاصل، أما الصيغة التي تكون قيمة صدقها هى «ص» أحياناً (أي صادقة أحياناً)، و«ك» أحياناً (أي كاذبة أحياناً)، فتسمى تركيبية Synthetic. والواقع أن كافة القضايا الفيزيائية - سواء أكانت قوانين فيزيائية أم قضايا تتعلق بالشروط الفيزيائية في عصر معين - هى قضايا تركيبية. وأخيراً فإن الصيغة التي تكذب في جميع قيم الصدق تسمى صيغة التناقض contradiction، وهى تكون كاذبة على الدوام. ويؤكد ريشنباخ على أنه يمكننا - انطلاقاً مما لدينا من تحصيلات الحاصل - إقامة قواعد تتيح لنا معالجة الصيغ المنطقية على نحو مماثل لما هو متبع في المناهج الرياضية[1].

«إن الفكرة التي يتحدد من خلالها المنهج الخاص بإقامة منطق ثلاثي القيم، هى أنه يمكن النظر إلى الميتالغة metalanguage للغة الخاصة بالمنطق الثلاثي القيم على أنها تنتمي إلى المنطق الثنائي القيم. وهكذا ينظر ريشنباخ إلى القضايا من نوع «ق لها قيمة صدق ص» بوصفها قضايا ثنائية القيم، وبالتالي يمكن إقامة قوائم صدق المنطق الثلاثي القيم بطريقة مشابهة للطريقة التي يتم بها وضع قوائم صدق المنطق الثنائي القيم. والاختلاف الوحيد بين

(1) Ibid., P. 150.

هذين النوعين من قوائم الصدق هو أن الأعمدة الرأسية التي على يمين الخط المزدوج ينبغي أن تشتمل على كل الروابط الممكنة للقيم الثلاث: ص، د، ك»(*).

من الواضح أن عدد الإجراءات القابلة للتعريف في القوائم الثلاثية القيم لابد أن يزيد زيادة كبيرة عن عددها في القوائم الثنائية القيم، إذ يمكن النظر إلى الإجراءات المُعَرَّفة بوصفها تعميمات للإجراءات الخاصة بالمنطق الثنائي القيم. وعندئذ سيكون لدينا العديد من التعميمات لكل إجراء من إجراءات المنطق الثنائي القيم. وعلى هذا النحو سوف نتوصل إلى العديد من صور النفي، واللزوم، والفصل، والعطف... إلخ. غير أن ريشنباخ يقتصر على تعريف الإجراءات كما توضحه قائمتا الصدق رقمي (٤)، (٥).

قائمة رقم (٤)

ق	نفي دائري ~ ق	نفي مباشر - ق	نفي تام قً
ص	د	ك	د
د	ك	د	ص
ك	ص	ص	ص

(*) المراد من هذه الرموز الثلاثة، ما يلي:
ص ترمز لقيمة الصدق. د ترمز لقيمة اللاتحديد. ك ترمز لقيمة الكذب.

قائمة رقم (٥)

ق	ل	فصل ق ∨ ل	عطف ق . ل	لزوم عادي ق ⊃ ل	لزوم بديل ق ← ل	لزوم ظاهري ق ∈ ل	تكافؤ عادي ق ≡ ل	تكافؤ بديل ق ≡ ل
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	د	ص	د	د	ك	د	د	ك
ص	ك	ص	ك	ك	ك	ك	ك	ك
د	ص	ص	د	ص	ص	د	د	ك
د	د	د	د	ص	ص	د	ص	ص
د	ك	د	ك	د	ص	د	د	ك
ك	ص	ص	ك	ص	ص	د	ك	ك
ك	د	د	ك	ص	ص	د	د	ك
ك	ك	ك	ك	ص	ص	د	ص	ص

أن النفي - كما سبق أن ذكرنا - هو إجراء أحادي يتعلق بقضية واحدة، وعلى ذلك فإنه لا يوجد سوى نفي واحد في المنطق الثنائي القيم. أما في المنطق الثلاثي القيم، فإنه يمكن القيام بعدة إجراءات على القضية الواحدة، وتسمى جميعها نفياً لإنها تغير من قيمة صدق القضية. ومن الأنسب النظر إلى قيم الصدق ص، د، ك بالترتيب، على إنها تسير من القيمة الأعلى ص إلى القيمة الأدنى ك. ويمكن القول - بناءً على استخدامنا لهذه المصطلحات - أن النفي الدائري cyclical negation هو الذي ننتقل فيه من قيمة الصدق إلى القيمة الأدنى منها التي تليها، حتى نصل إلى أدنى قيمة، وهنا ننتقل إلى أعلى قيمة لتبدأ الدورة من جديد. وعلى ذلك فإن التعبير ~ قَ يُقْرَأ: تال - ق. أما في حالة النفي المباشر فيتم نقض ص، ك. فإذا كانت قيمة الصدق هى ص تصبح في حالة النفي المباشر ك، والعكس صحيح. أما قيمة د فتظل كما هى دون تغيير. وهذا يناظر وظيفة علامة الطرح الحسابي حين نفّسر قيمة د على أنها تساوي صفراً، ولذلك يطلق ريشنباخ[1] على التعبير «- ق» اسم «نفي ق» ويُقْرَأ: ناقص ق. أما النفي التام فننتقل فيه من قيمة الصدق إلى القيمة الأعلى من القيمتين الأخرتين وتُقْرَأ ق هكذا لا - ق.

وبالنسبة للإجراءات المنطقية الخاصة بالمنطق الثلاثي القيم يستخدم ريشنباخ التدوين الرمزي التالي:

نفي تام	—
نفي دائري	~
نفي مباشر	-
عطف	.
فصل	٧
لزوم ظاهري	⋹

(1) Ibid., P. 166.

لزوم عادي $\supset$

لزوم بديل $\leftarrow$

تكافؤ عادي $\equiv$

تكافؤ بديل $\equiv$

يقول ريشنباخ: «إن اللغة المبنية على الملاحظة والخاصة بميكانيكا الكوانتم هى لغة ثنائية القيم»، ثم يستدرك ريشنباخ قائلاً: «على الرغم من أن هذا القول صحيح في مجمله، فإنه يحتاج بعض التصحيح. وسوف يتضح هذا حين نبحث المسألة المتعلقة باختبار التنبؤات التي تستند إلى الاحتمالات التي تشير إلى قيمة اللاتحديد حتى في إطار اللغة المبنية على الملاحظة»[١].

يوضح ريشنباخ المسألة السابقة من خلال بحث قضيتين من قضايا اللغة المبنيّة على الملاحظة. تقول القضية الأولى «إذا أُجْرِى القياس س، وأوضح المؤشر أن قيمة هذا القياس هى ل»، وتقول القضية الثانية: «إذا أُجْرِىَ القياس ص، وأوضح المؤشر أن قيمة هذا القياس هى ن»، فإننا ندرك أنه ليس من الممكن التحقق من قيمة القضيتين معاً، ولذا ينبغي - في رأي ريشنباخ - أن نسلم بوجود قضايا تكاملية complementary statements حتى في إطار اللغة المبنية على الملاحظة. كما يرى ريشنباخ أنه لا يمكن التوصل إلى القضايا التكاملية عن طريق القضيتين: «المؤشر يوضح أن قيمة القياس هى ل» و«المؤشر يوضح أن قيمة القياس هى ن»، وذلك لأن هاتين القضيتين يمكن التحقق منهما - حتى وإن لم يتم إجراء القياس - طالما أن المؤشر أشار أو لم يشر إلى القيمتين المذكورتين. وبعبارة أدق يمكن القول أن علاقة اللزوم «س $\supset$ ل» وعلاقة اللزوم «ص $\supset$ ن» هما علاقتان متكاملتان. وبالتالي فإن لدينا هنا في إطار اللغة المبنية على الملاحظة، لزوم ثلاثي القيم. كما يمكننا الحصول على قيمة الصدق الخاصة باللاتحديد، ولكن ما هى طبيعة هذا اللزوم؟ من المؤكد أنه ليس لزوماً مادياً لقوائم الصدق الثنائية القيم [قائمة رقم (١)]، ومن ثمَّ فإنه بالنظر إلى القضية:

(1) Ibid., PP. 166 - 167.

ص ⊂ ن   (١)

بوصفها مصوغة على أساس اللزوم المادي، ستكون هذه القضية صادقة إذا أُجْرِيَ القياس س، وعندئذ تكون القضية ص كاذبة. ولا يمكن تجنب هذه الصعوبة بمحاولة تفسير اللزوم رقم (١) بوصفه لزوماً يتعلق بالقوانين الفيزيائية. وعلى الرغم من أن هذا التفسير قد أصبح كافياً بالنسبة إلى الحالات الأخرى التي يبدو خلالها اللزوم المادي غير مقبول، فإنه لا يمكن استخدام اللزوم رقم (١) طالما أن اللزوم الذي من هذا النوع لا يتضمن ضرورة ما[1].

وإذا أردنا الآن تفسير اللزوم رقم (١) عن طريق اللزوم العادي واللزوم البديل للمنطق الثلاثي القيم، فسوف نواجه ببعض الصعوبات التي واجهتنا في حالة اللزوم المادي الثنائي القيم. فطالما أن كلاً من ص ون هما قضيتان لهما قيمة صدق ثنائية، فإنه لا يمكننا أن نستخدم سوى الصفوف - الموجودة في قائمة الصدق الثلاثية القيم رقم (٢) - التي لا تتضمن قيمة اللاتحديد د في العمودين الأولين، غير أنه بالنسبة إلى هذه الصفوف فإن كلاً من اللزومين الأول والثاني تكون نتائجهما متطابقة مع نتائج اللزوم المادي لقوائم الصدق الثنائية القيم [قائمة رقم (١)]. ومع ذلك يبقى اللزوم الظاهري الذي نعبر عنه بالعلاقة التالية بدلاً من اللزوم رقم (١).

ص ⋐ ن   (٢)

إن هذا اللزوم تتوافر فيه الصفات المطلوبة، فعن طريق حذف كل الصفوف التي تتضمن القيمة اللامحدودة د يمكننا الحصول، من العمودين الأولين، على اللزوم الذي توضحه القائمة رقم (٦).

---

(1) Ibid., PP. 166 - 167.

قائمة رقم (٦)

ق	ل	لزوم ظاهري ق⋐ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	د
ك	ك	د

لذلك فإن اللزوم رقم (٢) يناظر القول: بأنه طالما أننا ننظر إلى القضية «ص ⊂ ن» على أنه يمكن إثبات صحتها أو كذبها في حالة ما إذا كانت ص صادقة فحسب، في حين أننا ننظر إليها على أنها غير محددة القيمة في حالة كذب ص[١].

كل هذا يثبت أن اللغة المبنية على الملاحظة والخاصة بميكانيكا الكوانتم ليست ثنائية القيم دائماً. فعلى الرغم من أن القضايا الأولية ثنائية القيم، فإن اللغة التي تحتوى على تجمعات لتلك القضايا هى لغة ثلاثية القيم، لأن هذه التجمعات يتم بناؤها بواسطة اللزوم الظاهري. وعلى ذلك فإن قائمة الصدق رقم (١) للمنطق الثنائي القيم ينبغي إكمالها بقائمة الصدق الثلاثية القيم رقم (٦) الخاصة باللزوم الظاهري[٢].

وهكذا يتضح لنا أن البناء المنطقي الثلاثي القيم لميكانيكا الكوانتم يتغلغل حتى داخل اللغة المبنية على الملاحظة. فعلى الرغم من أن اللغة المبنية على الملاحظة لميكانيكا الكوانتم تكتمل بطريقة إحصائية، فإنها تعد ناقصة بالنسبة إلى التحديدات الدقيقة. إنها تنطوي على علاقات لزومية ثلاثية القيم. فلو لم تكن علاقة اللاتحديد موجودة في العالَم الأصغر microcosm لكن من الممكن استبعاد اللزوم الثلاثي القيم، ولكان من الممكن تفسير اللزوم «س ⊂ ل» على أنه لزوم عقلي، يمكن من حيث المبدأ إثباته أو دحضه. ومع

(1) Ibid., PP. 166 - 168.
(2) Ibid., P. 168.

ذلك فإن اللايقين الذي تتصف به العلاقات المستمدة بالملاحظة والخاصة بالعالَم الأصغر إنما يتغلقل داخل العالَم الأكبر macrocosm. إن عدم إمكان القيام بتنبؤات دقيقة في مجال العالَم بالغ الصغر، إنما يؤدي - في رأي ريشنباخ - إلى ضرورة مراجعة البناء المنطقي للعالَم الأكبر.

المراجــع

المراجع

أولاً: المراجع العربية

١- د. أبو العلا عفيفي، المنطق التوجيهي، مطبعة لجنة التأليف والترجمة والنشر، القاهرة، ١٩٣٨.

٢- تارسكي (ألفرد)، مقدمة للمنطق - ولمنهج البحث في العلوم الاستدلالية، ترجمة د.عزمي إسلام، مراجعة د. فؤاد زكريا، الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر، القاهرة، ١٩٧٠.

٣- رسل (برتراند)، مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة د. محمد مرسى أحمد، ومراجعة د. أحمد فؤاد الأهواني، مؤسسة سجل العرب، القاهرة، ١٩٨٠.

٤- رسل (برتراند)، أصول الرياضيات، الجزء الأول، ترجمة الدكتور محمد مرسى أحمد والدكتور أحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، القاهرة، ١٩٦٥.

٥- ريشنباخ (هانز)، نشأة الفلسفة العلمية، ترجمة د. فؤاد زكريا، الطبعة الثانية، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ١٩٧٩.

٦- د. زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، الطبعة الأولى، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ١٩٥١.

٧- د. سهام النويهي، أسس المنطق الرياضي، رؤية حديثة، توزيع مكتبة النهضة المصرية، القاهرة، ١٩٨٧.

٨- د. عبد الرحمن بدوي، المنطق الصوري والرياضي، وكالة المطبوعات، الكويت، ١٩٧٧.

٩- د. عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ١٩٧٠.

١٠- د. عزمي إسلام، دراسات في المنطق - مع نصوص مختارة، مطبوعات جامعة الكويت، الكويت، ١٩٨٥.

١١- د. نازلي إسماعيل حسين، مبادئ المنطق الرمزي، المركز العلمي للطباعة، القاهرة، ١٩٨٠.

١٢- د. نجيب بلدي، بسكال، القاهرة، دار المعارف، سلسلة نوابغ الفكر الغربي، ١٩٨٦.

١٣- د. ماهر عبد القادر محمد علي، المنطق الرياضي، أورينتال، الإسكندرية، ١٩٨٤.

١٤- د. ماهر عبد القادر محمد علي، نظريات المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ٢٠٠٣.

١٥- مجمع اللغة العربية، المعجم الفلسفي، المطابع الأميرية، القاهرة، ١٩٧٩.

١٦- د. محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، الطبعة الأولى، دار النهضة العربية، بيروت، ١٩٦٩.

١٧- د. محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، ١٩٨٧.

١٨- محمود أمين العالِم، فلسفة المصادفة، دار المعارف، القاهرة، ١٩٧٠.

١٩- د. محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي - نشأته وتطوره، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، الطبعة الثالثة، ١٩٧٩.

٢٠- د. محمود قاسم، المنطق الحديث ومناهج البحث، دار المعارف، القاهرة، ١٩٦٧.

٢١- د. يحيى هويدي، منطق البرهان، مكتبة القاهرة الحديثة، القاهرة.

ثانياً: المراجع الأجنبية

21- Baldwin ,James Mark, Logic , in Dectionary of Philosophy and Psychology, The Macmillan Company, New York , 1925.

22- Carnap, Rudolf, Introduction to Symbolic Logic and its Applications, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

23- Copi, Irving , M., Symbolic Logic, The Macmillan Company, New York. 1967.

24- Edith Watsan Schipper and Edward Schuh, A First Course in Modern Logic, Routledge & Kegan Paul, London, 1960.

25- Kegley C. W. & Kegley I. A., Introduction to Logic, University Press of America, Lanham, 1984.

26- Langer, Susanne K., An Introduction to Symbolic Logic, Dover Publications, Inc., New York, 1967.

27- Lee, Harold Newton, Symbolic Logic, Routledge & Kegan Paul Limited, London, 1962.

28- Mitchell, David, An Introduction to Logic, Hutchinson University Liberary, London. 1967.

29- Pap, Arthur, An Introduction to the Philosophy of Science, New York, 1962.

30- Pollock, John L., An Introduction to Symbolic Logic, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York. 1969.

31- Reichenbach, H., Philosophic Foundations of Quantum Mechanics, University of California Press. Berkeley and Los Angeles, 1944.

32- Reichenbach , H., Philosophy and Physics, University of California Press, Berkeley and Los Angeles. 1946.

33- Reichenbach, H., Experience and Predication, the University of Chicago, 1952.

34- Reichenbach, H., The Philosophy of Space and Time Dover Publications, Inc., New York, 1958.

35- Reichenbach, H., From Copernicus to Einstein, Dover Publications, Inc., New York, 1980.

36- Reichenbach, H., Elements of Symbolic Logic, The Free Press, The Macmillan Company, New York, 1966.

37- Reichenbach, H., The Theory of Probability - An Inquiry into the Logical & Mathematical Foundations of the Calculus of Probability, University of California Press, Berkeley. Los Angeles, London, 1971.

38- Russell, B., Human Knowledge - Its Scope and Limits, George Allen & Unwin LTD., London.

39- Russell, Bertrand, Logic as the Essence of Philosophy, in "Our Knowledge of the External World", London, 1914.

40- Schipper E. W. & Scheer R. K., Fundamentals of Logic, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1980.

41- Searles. Herbert L., Logic and Scientific Methods, The Ronald Press Company. New York, 1968.

42- Stebbing, L., S., A Modern Introduction to Ligic, 4th., edition, Methuen & C., LTD., London, 1945.

43- Terrell, D. B., Logic - A Modern Introduction to Deductive Reasoning, Holt, Rinelart and Winston, Inc., New York, 1967.

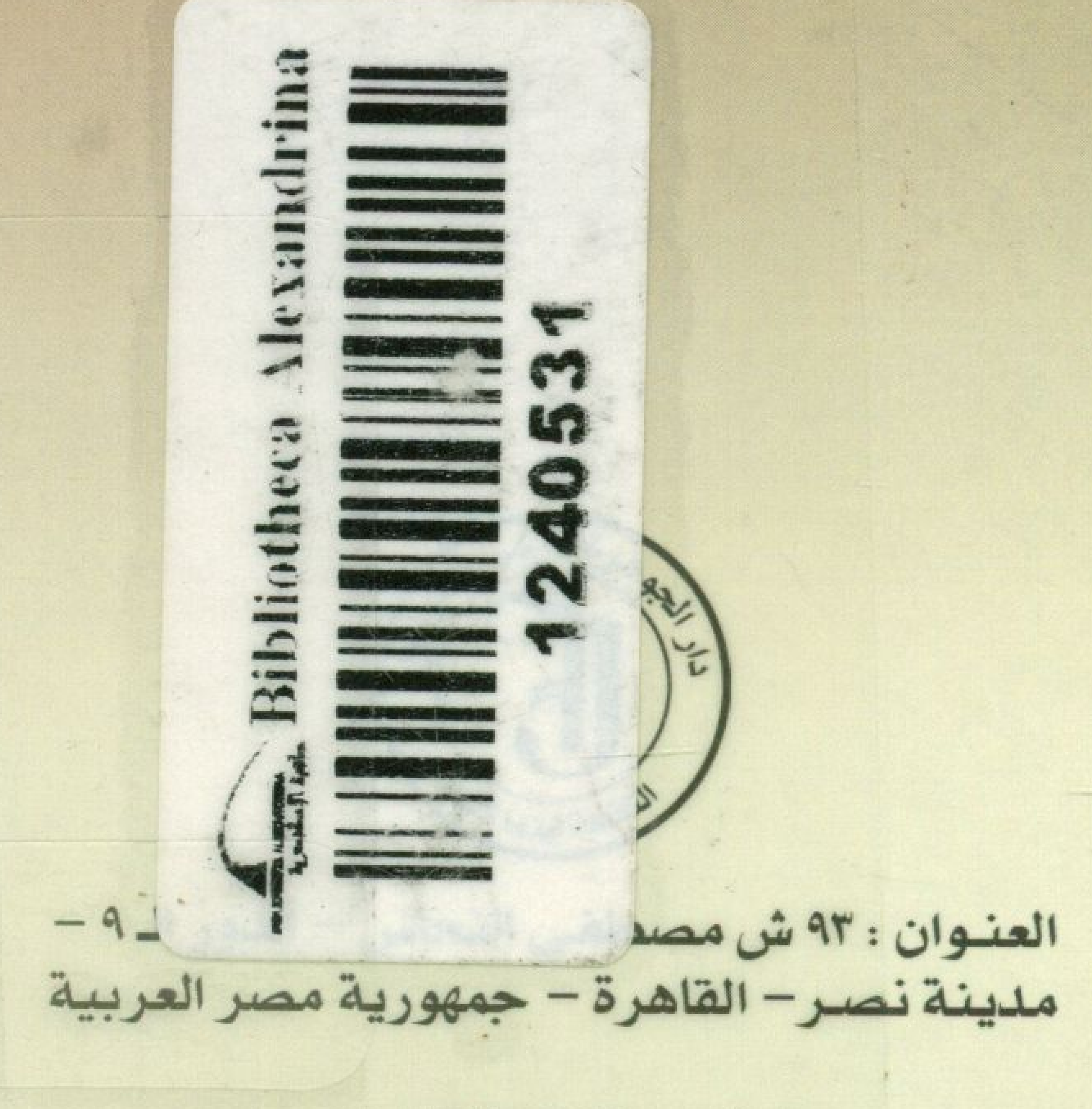
فهرس الموضوعات

الموضوع	الصفحة



المولف فى سطور

- حصل على الليسانس الممتازة قسم الفلسفة عام ١٩٧٩م بتقدير جيد جدا.
- حصل على الماجستير فى الآداب بتقدير ممتاز عام ١٩٨٥م.
- حصل على درجة الدكتوراة فى الآداب بتقدير مرتبة الشرف الأولى عام ١٩٨٩م.
- عمل أستاذاً معاراً بكلية الآداب بجامعة الكويت من عام ١٩٩٣م حتى عام ١٩٩٩م.
- قام بوضع كتاب "مبادئ التفكير الفلسفى" للمرحلة الثانوية نظام مقررات بوزارة التربية والتعليم بدولة الكويت أودع مكتبة الوزارة تحت رقم ٨٦٣ عام ٢٠٠٠م.
- عمل عضواً بلجنة بناء مناهج نظام المقررات بوزارة التربية والتعليم بالكويت من عام ١٩٩٣م حتى عام ١٩٩٩م.
- حاصل على جائزة البحوث الممتازة من جامعة عين شمس عام ٢٠٠٢م.



العنوان : ٩٣ ش مص... ـ ٩ -
مدينة نصر - القاهرة - جمهورية مصر العربية

الهاتف : ٢٦٧٠٩٢١٥ ٠٠٢٠٢

Dar.al-jawhrah.al-mutakdma@live.com
www.daraljawharh.com

